UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
FACULTAD DE LETRAS Y CIENCIAS HUMANAS

JUAN B. FERRO

PROCEDIMIENTOS DECISORIOS PARA FORMULAS MONADICAS DE PRIMER GRADO

(TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR EN LETRAS)

LIMA - PERU
1966

En memoria de
José L. Ferro y Angela Porcile,
mis padres

I N T R O D U C C I O N

Los algoritmos siempre han despertado desde lejanos tiempos un interés especial y en época reciente se erigió en problema de gran actualidad el hallazgo o invención de un algoritmo que permitiese siempre reconocer si una proposición es o no derivable en un sistema axiomático. De existir un algoritmo de esta especie bastaría que una persona fuese sólo capaz de leer, escribir y cumplir sistemáticamente un juego de prescripciones precisas para que supiese a ciencia cierta y en todo caso concebible si una expresión matemática cualquiera es o no un teorema, es decir, si dicha expresión es o no deducible o derivable de los axiomas de un sistema, y las Matemáticas quedarían reducidas así a una "ungeheure Trivialität" (*). No debe extrañar entonces que célebres autores, Hilbert y Herbrand entre ellos, no hayan vacilado en calificar de problema fundamental de la Lógica Matemática la búsqueda de un procedimiento tal (**).

El problema de la decisión, o Entscheidungsproblem, como lo denominó Hilbert, puede formularse de otro modo. Una fórmula o expresión lógica cualquiera, construída de acuerdo a tales y cuales reglas, interpretados sus signos de cierta manera, da lugar siempre (dentro de una Lógica bivalente) a una proposición verdadera o falsa. Existen ciertas fórmulas bien formadas de las que es imposible obtener una proposición falsa cualquiera que sea la interpretación que se intente, y en ese caso se dice que dichas fórmulas son universalmente válidas o lógicamente verdaderas. Se

(*) H. Behmann, Algebra der Logik, p. 166. Sobre la manera de citar y hacer referencias, véase Anexo II, Bibliografía, infra.
(**) Véanse Hilbert-Ackermann, Mathematical Logic, pp. 108 y 113, y J. Herbrand, Recherches, p. 32. El mismo Herbrand es autor de un famoso trabajo titulado "Sur le problème fondamental de la logique mathématique", cuyo tema es justamente el problema de la decisión (véase p. 15).

plantea entonces la importante cuestión de saber si existe o no un algoritmo, y de existir, en qué consisten sus reglas, para fallar en todo caso si una expresión o fórmula bien formada cualquiera es o no universalmente válida o lógicamente verdadera.

Este tema condujo a conocidas investigaciones que obligaron al esclarecimiento de nociones como decidibilidad y computabilidad, dando lugar a la teoría de las funciones recursivas, de hondas repercusiones teóricas y prácticas, y su momento decisivo llegó cuando Church demostró en 1936 que el Entscheidungsproblem para la Lógica Cuantificacional (o Funcional) de primer grado carece de solución general, es decir, que no es posible hallar un algoritmo para decidir acerca de la validez de cualquier fórmula predicativa n-ádica de primer grado.

Ha sido posible inventar, sin embargo, diversas soluciones parciales, y entre éstas se encuentran la de las "truth-functions" o esquemas moleculares y la de las fórmulas monádicas de primer grado. Los algoritmos descubiertos para decidir sobre la validez de esta última clase de fórmulas no son del todo satisfactorios desde un punto de vista operativo, y Church afirma, aunque con cierta exageración, que aquéllos son "too cúmbersome for application in practice to any but the very simplest wffs - or else to any but certain kinds of wffs (such as those which are already in normal form or nearly so" (*). Este temperamento se halla muy difundido, y es común en los textos de enseñanza prescindir de los procedimientos algorítmicos, en favor, en el mejor de los casos, de otros no algorítmicos.

Hay que convenir, sin embargo, en que los inconvenientes de los algoritmos o procedimientos decisorios no constituyen razón suficiente para tal actitud. Aquéllos, en efecto, se distinguen

---

(*) Review, p. 59.

de los demás tipos de prueba por ser terminantes, mecánicos y generales, de modo que una vez finalizada la serie de operaciones que prescriben se debe ya saber definitiva e inequívocamente si la fórmula examinada es o no un teorema, o, desde otra perspectiva, lógicamente verdadera o no. Un procedimiento no algorítmico, por el contrario, ni es terminante, ni mecánico, ni general, y esto quiere decir que, de no llegarse a un resultado afirmativo mediante su aplicación, nada garantiza, ni siquiera la posibilidad de llegar o no llegar alguna vez a un resultado (*).

Además, por molesto y engorroso que sea un procedimiento decisorio, un procedimiento de derivación formal, por mencionar el método no algorítmico por excelencia, no lo es menos, y en el caso de fórmulas verdaderamente teratológicas las dificultades corren parejas en ambos. Desde el punto de vista de la enseñanza, asimismo, la utilización de algoritmos decisorios en un curso de nivel elemental o medio no parece reportar sino beneficios, pues, con todo lo elegante que pueda ser la técnica de derivación formal - cuya importancia nadie discute -, ésta exige al estudiante un apreciable grado de familiaridad con técnicas simbólicas e indispensables dotes personales.

Estas circunstancias justifican la búsqueda de un procedimiento decisorio para fórmulas monádicas de primer grado fácil de aplicar, por lo menos en el nivel de expresiones de módica pero no desdeñable complejidad, y de tal naturaleza que aparezca como inevitable continuación de las técnicas y objetivos propios de la Lógica Proposicional, sin cambios de orientación y con un mínimo de agregados.

(*) "Si un esquema es válido, la rutina que muestra la validez funcionará; pero si no lo es, esa rutina puede funcionar indefinidamente dejándonos a la expectativa por toda la eternidad." (Quine, Métodos, p. 260).

A tal empresa se destina esta tesis y por ello se explica que empiece exponiendo, luego de un capítulo introductorio acerca del problema de la decisión, los más difundidos procedimientos decisorios utilizados en Lógica Cuantificacional monádica (de primer grado), basados todos, en una forma u otra, en la técnica de evaluación tabular, señalando sus sendas ventajas e intentando descubrir sus deméritos, y concluya proponiendo un procedimiento no empleado al parecer hasta hoy (que aprovecha una idea de J. Herbrand) y que, si el sustentante no yerra, ofrece visibles ventajas de orden práctico y didáctico sobre los estudiados en primer término.

La exposición de estos procedimientos insiste en los aspectos y problemas referentes a su puesta en práctica, prescindiendo sistemáticamente de todo lo que concierne a su origen, conexiones históricas y justificación (que, salvo en el último de ellos, se supone establecida), y no siempre sigue la terminología peculiar de cada autor ni repite pasivamente las explicaciones originales, que en unos casos llevan el detalle al extremo mientras que en otros brillan por su concisión y parquedad.

Si bien trata de respetar - lográndolo casi siempre - los términos técnicos empleados por cada autor, en lo que concierne a los algoritmos mismos el sustentante prefiere sacrificar - o traicionar tal vez sea mejor - el aire, estilo o manera propia de sus creadores en beneficio de la unidad del trabajo y de la normalización de las correspondientes instrucciones, y toma partido por una exposición escueta, de la que no debe esperarse una reproducción apenas alterada de los respectivos textos, pero sí una rigurosa fidelidad en lo concerniente a los detalles técnicos, llegándose incluso a prolijas ampliaciones de ciertos aspectos que no aparecen suficientemente claros en su presentación original.

La terminología y notación, en general, son de uso corriente en la literatura lógica, y se suponen conocidas por quienes a cudan a este trabajo, el cual, por lo demás, no exige para su comprensión otra cosa que un mínimo de familiaridad con las técnicas de manipulación, tanto de truth-functions, incluído el método resolutivo de Quine, cuanto de fórmulas cuantificadas monádicas de primer grado. Sin embargo, para obviar cualquier dificultad al respecto, se incluye en la última sección del primer capítulo una relación, suficientemente pormenorizada, de la terminología que el sustentante usa más frecuentemente.

Tal vez sea criticable el número excesivo de ejemplos y la sencillez de una buena mayoría de ellos, elegidos en unos casos para permitir una fácil comprensión de las reglas pertinentes y en otros para ilustrar aspectos importantes de su empleo. No hay duda que dicho número ha podido ser reducido, prescindiendo de a quellos casos que por demasiados elementales pudieran disminuir el nivel académico de la tesis, pero se ha preferido, en éste y otros detalles, pecar por exceso antes que por defecto.

Puede ser asimismo criticable que este trabajo, presentado para alcanzar un grado académico en Filosofía, cubra aspectos más bien técnicos de la Lógica y no irrumpa en sus niveles propiamente especulativos o filosóficos. Pero el graduando ha elegi do el tema con toda deliberación, por creer que justamente el me jor aporte que hoy puede hacerse en nuestro medio a aquella disciplina - por minúsculos que puedan ser su tema y alcance, como en el caso presente - es ayudar a perfeccionar antes que nada el dominio de sus medios instrumentales y aparato simbólico, para que a la postre, cuando sobrevengan inevitablemente el examen y la discusión de los problemas verdaderamente serios que le son propios, aquéllos se realicen sobre la base de un saber proveniente del oficio y no de un amasijo de ocurrencias sin sustento.

Erratas importantes

Pág.	línea	Dice:	Debe decir:
1.10	21	übersich-	übersicht-
1.10	22	tlicher	licher
1.21	4	(Qx_1)	(Qx_i)
3.17	$\hat{5}$	Así mismo	Asimismo
4. 4	13	táctica	tácita
5.16	$\hat{2}$	Ibid., p. 42	Op. cit., p. 42
6. 5	4	en-	end-
6. 6	5	dliche	liche
7. 6	14	tendría	tendrá
7.11	6	ha resuelto F	ha resultado F
8.18	23/4	unificadas las variables	unificada la variable
8.29	$\hat{1}$	De Smullyan, ibid.,p.77.	De Smullyan, ibid.,p.77, modificado.
8.30	21	del segundo E-cuantificador	de la segunda E-cuantificación

I N D I C E

CAPITULO I

El problema de la decisión

1. Existen en Matemáticas ciertos problemas como, por ejemplo, la obtención de la suma de dos números enteros positivos, que se resuelven mediante un método uniforme, fijado de una vez por todas, y aplicables a cualquier par de tales números, esto es, tomando en cuenta, no la solución del problema para dos números concretamente dados, sino la solución del mismo para la clase íntegra de todos los pares posibles de números de esa especie.

Cuando tal método consiste en un conjunto finito de instrucciones exactas que definen una serie también finita de operaciones, ordenada de tal manera que la elección de éstas dependa de determinados resultados obtenidos de antemano, se dice que se trata de un procedimiento algorítmico o, más brevemente, de un algoritmo. Algoritmos son, entre otros muchos, las archiconocidas operaciones fundamentales de la Aritmética y el procedimiento para hallar el máximo divisor común de dos enteros positivos dados.

Las prescripciones que en número finito constituyen un algoritmo han de ser fijas, precisas, y de tal modo comprensibles, que, sin dejar margen alguno para la arbitrariedad o libre albedrío de quien las utilice, dispongan sistemáticamente el cómo de las operaciones que la integran, así como las condiciones bajo las cuales deben elegirse todas y cada una de ellas. "Such instructions are to be conceived of as requiring no 'creative' thought in their execution. In principle it is always possible to construct a machine for carrying out such a set of instructions or to prepare a program by means of which a given large-scale digital computer will be enabled to carry them out" (*).

(*) Davis, Computability, p. xv.

Por tal motivo suele decirse que un algoritmo es puramente "mecánico", no dependiendo, en lo tocante al éxito de su aplicación, de la conducta inteligente de quien lo aplique o de su ingenio creador (*). Es un proceso "which can be repeated successfully at any time and by anyone" (**).

Un algoritmo, como se dijo, no puede estar limitado a la solución de problemas, por decirlo así, individuales. Debe ser "general": las instrucciones que lo constituyan habrán de servir para resolver acerca de una clase íntegra de problemas. Pero debe ser, además, "terminante", es decir, habrá de conducir siempre a un resultado. Si dada una clase de problemas y aplicadas correctamente las respectivas instrucciones no es posible obtener un resultado en toda ocasión, entonces dichas instrucciones no constituyen propiamente un algoritmo.

El empleo de algoritmos es no sólo la técnica fundamental para la solución de una gran variedad de problemas sino también un problema en varios respectos. Se ha dicho que un algoritmo es un "effective method of calculation" (*+). ¿Qué significa, propiamente hablando, "efectivo"? ¿Existe o no un procedimiento efectivo, es decir, un algoritmo, para establecer si un determinado procedimiento de cálculo es o no efectivo, es decir, es o no un algoritmo? ¿Será posible construir algoritmos para toda clase de problemas matemáticos?

No interesa aquí la investigación a fondo de éstas y otras cuestiones relacionadas con los algoritmos: para el propósito de este trabajo, si se afirma la existencia de un algoritmo que per-

(*) "... a decision method must be like a recipe, which tells one what to do at each step so that no intelligence is required to follow it..." (Tarski, A Decision Problem for elementary Algebra and Geometry, cit. en R.L. Wilder, Foundations, p. 261).
(**) Trakhtenbrot, Algorithms. p. 7.
(*+) Church, Introduction, p. 52, n. 118, in fine.

mite resolver un determinado problema y se acompaña su descripción, no queda otra cosa que mostrar - si ello es preciso - que cumple su cometido dentro de las condiciones estipuladas. Si no fuera así, el algoritmo propuesto no lo es en realidad, y la cuestión de la existencia del algoritmo para la solución de aquel problema quedará abierta mientras no se ofrezca el algoritmo requerido o se demuestre que dicho algoritmo no puede existir. De esta manera queda soslayada la espinosa cuestión de la determinación de la noción de efectividad (*) y de la posibilidad o imposibilidad de la existencia de algoritmos para un problema dado(**).

2. Algunos algoritmos, como aquellos indicados a manera de ejemplo líneas arriba, tienen por finalidad "the exhibiting of some object" y reciben el nombre genérico de procedimiento de cálculo ("calculation procedures")(*+). Pero también existen en Matemáticas problemas cuya solución no consiste en la exhibición u obtención de un cierto objeto, sea número o no, sino en responder con un sí o con un no "any particular instance of a general question" (+*), como, por ejemplo, ¿es o no divisible por dos un número entero positivo N dado? o ¿tiene o no raíces enteras la ecuación linear diofantina $ax + by = c$, donde a, b y c son enteros conocidos?

Si aceptamos, con la Academia, que "decidir" significa "formar juicio definitivo sobre algo dudoso o contestable", es eviden

---

(*) Se han propuesto hasta tres diferentes definiciones de efectividad: la de Post y Turing, la de Church, y la de Herbrand y K. Gödel; en opinión de Rosser "are equivalent, so it does not matter which one is used" (Informal Exposition, pp. 53-56). Un método efectivo, de acuerdo a esa idea común, sería aquél, "each step of which is precisely predetermined and which is certain to produce the answer in a finite number of steps" (op. cit., p.55).
(**) Véase Davis, op. cit., p. xvi.
(*+) Kleene, Metamathematics, p. 137.
(+*) Ibid., p. 136.

te que en los últimos problemas citados se trata en realidad de alcanzar una decisión sobre la divisibilidad de N respecto al número 2 o sobre la existencia de soluciones enteras para un determinado tipo de ecuación. Ahora bien; el problema de saber si existe un algoritmo para llegar a una decisión acerca de alguna cuestión dada (algoritmo decisorio) y, de haberlo, cuáles son las instrucciones que lo constituyen, es lo que se denomina el problema de la decisión para dicha cuestión.

También en Lógica existe un importantísimo problema que puede ser incluído dentro de los decisorios, y se plantea dentro de ciertas condiciones específicas que van a ser señaladas inmediatamente a fin de permitir en lo sucesivo una discusión ordenada del problema, circunscrito, a partir de aquí, al ámbito de dicha disciplina.

Sea C una clase bien definida de fórmulas o expresiones lógicas y denomínense éstas "fórmulas o expresiones bien formadas". Sea además L una subclase propia de C, a la que pertenecen únicamente fórmulas o expresiones definidas por cierta propiedad(*), y sea, finalmente, una fórmula arbitraria S, perteneciente a C, cuya pertenencia o no pertenencia a L se trata de establecer algorítmicamente. Se dice entonces que existe un problema de decisión para C, y si existe un algoritmo que permite establecer a ciencia cierta si S pertenece o no a L, se dice que el problema de la decisión para las fórmulas bien formadas tiene una solución positiva, tomando el referido algoritmo el nombre de procedimiento decisorio para C (**).

(*) Esta propiedad puede ser, como se verá luego, la de "ser teorema de un sistema", o la de "ser (universalmente) válida o l-verdadera", o la de "ser satisfactible".
(**) Un algoritmo que permita establecer la pertenencia, pero no la no pertenencia, no es, en rigor, decisorio. Sobre algunos procedimientos mecánicos no decisorios, véase Anexo I, infra.

Si se demuestra que no existe ni puede existir algoritmo alguno que resuelva el problema, se dice que el problema de la decisión para C tiene solución negativa o, más bien impropiamente, que es insoluble. Cuando se desconoce un algoritmo que permita establecer si S pertenece o no a L, pero no se ha demostrado su imposibilidad, el problema de la decisión para C no ha sido resuelto.

3. Antes de pasar al estudio de las diversas reglas de constitución de las clases C y L y de las soluciones alcanzadas hasta hoy, es conveniente esclarecer algunos aspectos de la formulación misma del problema de la decisión, que puede efectuarse de diversas maneras, según sea la propiedad que se elija para definir las fórmulas que pertenecen a L. Así es como suele hablarse de formulación sintáctica y formulación semántica del problema de la decisión, que desde un punto de vista teórico ofrecen diferencias muy marcadas.

La formulación sintáctica se apoya en la noción de sistema axiomático, esto es, un conjunto de: i) reglas que definen las expresiones bien formadas del sistema ("fbf"); ii) reglas de derivación que permiten generar fbfs a partir de otras pocas, elegidas de antemano, y denominadas postulados o axiomas del sistema; iii) los axiomas mismos; y iv) las fbfs generadas mediante las reglas de derivación y conocidas con el nombre de teoremas del sistema. Si C es la clase de las fbfs del sistema S_A, y L la de sus teoremas, el problema de la decisión en S_A, formulado sintácticamente, consiste en saber si existe o no un algoritmo que permita decidir si una fbf arbitraria S pertenece o no a L, o en otras palabras, si dicha fórmula es o no teorema de S_A.

Una formulación de esta especie es la que proporciona Church: "The decision problem of a logistic system is the problem to find an effective procedure or algorithm, a decision procedure by which, for an arbitrary well formed formula of the sys tem, it is possible determine whether or not it is a theorem (and if it is a theorem to obtain a proof of it)"(*)

El problema de la decisión, formulado sintácticamente, suele conocerse también con el nombre de problema de la decisión para la derivabilidad (**), o para la demostrabilidad (*+), o para la deducibilidad (+*).

En la formulación semántica, en cambio, se recurre a lo que algunos autores llaman "validez" o "validez universal" y otros "verdad lógica" de una fórmula o expresión lógica, concepto que a su vez se basa en una definición de "proposición verdadera" que prescinde de toda referencia a la noción de derivabilidad dentro de un sistema axiomático.

De acuerdo a esto, dada una expresión arbitraria S perteneciente a C, y C es la clase de las fbfs de la Lógica Cuantificacional de primer o segundo grado, se obtiene una proposición verdadera o falsa a) substituyendo sus variables individuales por elementos pertenecientes a un dominio D no vacío, de modo tal que resulten reemplazadas de la misma manera en todos los lugares en que aparezcan; b) substituyendo sus letras o variables proposicionales por uno de los valores V y F; c) substituyendo sus letras o variables predicativas por predicados individuales definidos en D; y, finalmente, d) interpretando los cuantificadores y conectivas de acuerdo a un significado convenido.

(*) Church, op. cit., p. 99. Otras formulaciones sintácticas en Kleene, op. cit., p. 137, y Beth, Foundations, p. 584.
(**) "... ein Verfahren zur Entscheidung über die Ableitbarkeit einer Formel."(Hilbert-Bernays, Grundlagen, I, p.207).
(*+) "... decision problem for provability..."(Stoll, Set Teory and Logic p. 408). Es también la denominación que emplea Church (op. cit., p. 100).
(+*) "... the deducibility problem..."(Trakhtenbrot, op. cit., p.51). Church usó alguna vez este término (op. cit., p. 100).

Ahora bien: si S no es verdadera (*) para ningún individuo del dominio D, ninguna asignación de valores a las variables proposicionales y ninguno de los predicados definidos en dicho dominio, S es inconsistente o contradictoria; si S es verdadera para algún individuo del dominio D, alguna asignación de valores a las variables proposicionales y alguno de los predicados definidos en D, S es consistente o satisfactible; si S es verdadera para todos los individuos de algún dominio D con r elementos, para toda asignación posible de valores a las variables proposicionales y todos los predicados en D, S es r-válida, es decir válida o l-verdadera en el dominio D; y, finalmente, si S es verdadera para todos los individuos de cualquier dominio, para toda asignación posible de valores a las variables proposicionales y para todos los predicados definidos en D, S es válida(**), universalmente válida(*+), idénticamente verdadera (+*) o lógicamente verdadera(++)(***) (**+).

(*) En rigor debería decirse "si S es tal que no permite obtener una proposición verdadera, etc.", pero no cabe imaginar que, dentro del contexto en que figuran, éste y demás giros similares puedan ser comprendidos en otro sentido.
(**) Quine, Methods; Kleene, op. cit.
(*+) "Allgemeingültig" (Hilbert-Bernays, op. cit.); "universally valid"(Ackermann, Solvable Cases).
(+*) "Identisch wahr" (Hilbert-Bernays, op. cit.).
(++) "Logisch wahr" (Carnap, Einführung).
(***)Existen otras caracterizaciones tal vez más precisas de conceptos como "proposición verdadera" , "satisfactibilidad" y "validez", pero la expuesta aquí, que sigue la dirección de Hilbert, no requiere muchos preámbulos formales y es suficiente para el fin que persigue este trabajo.
(**+)Conviene distinguir como caso especial de validez (consistencia, inconsistencia) la validez (consistencia, inconsistencia) "truth-functional", "composicional" o "molecular" de las fbfs compuestas exclusivamente por conectivas y letras proposicionales ("truth- functions" o "esquemas moleculares") o de todas aquellas fbfs que se obtienen a partir de una truth-function tautológica (consistente, inconsistente) reemplazando total o parcialmente sus letras proposicionales, de manera sistemática, por fórmulas predicativas abiertas o cuantificadas de cualquier especie. C-validez (c-consistencia, c-inconsistencia) deberá leerse en lo sucesivo como validez(consistencia, inconsistencia) composicional o truth-functional, y esta indicación vale también para los vocablos derivados.

El problema de la decisión, formulado en términos semánticos, es el de hallar un algoritmo que permita determinar si una fbf arbitraria S pertenece o no a la clase L de fórmulas universalmente válidas o l-verdaderas. Para Ackermann, por ejemplo, el problema consiste en "to decide for a given well formed formula whether it is universally valid or not" (*).

Ambas formulaciones, la sintáctica y la semántica, se hallan íntimamente ligadas y no existe inconveniente alguno para aceptar que, si la Lógica Cuantificacional de primer grado es completa, como lo ha demostrado Gödel (**), decidir si una fbf de dicha Lógica es válida o l-verdadera es decidir también si es deducible o derivable. La conversa también es cierta (*+). De esta manera ambas formulaciones son equivalentes (+*).

Pero si bien se ha podido demostrar la decidibilidad semántica, esto es, la solución del problema de la decisión por medios semánticos, de muchas clases de fórmulas, la decidibilidad sintáctica es mucho más difícil de establecer (si es que, después de todo, puede establecerse) "since we have no general criterion for the deducibility of a formula" (++). Esto explica por qué la formulación semántica es la favorecida por los autores que han

---

(*) Ackermann, op. cit., p. 23.
(**) El examen de los argumentos constructivos contra la validez de esta demostración excede con mucho el objetivo de la tesis, cuyos resultados, por lo demás, no dependen de la procedencia o improcedencia de aquéllos.
(*+) "... if a sentence is provable in the predicate calculus, then it is universally valid." (R. L. Goodstein, Mathematical Logic, p. 39). En igual sentido opina Ackermann (op. cit., p. 10).
(+*) "For theories M formalized within elementary logic (actually, so far nearly all investigations have been concerned with theories of this kind) the two versions of the decision problem are equivalent, on account of the completeness theorem." (E. W. Beth, op. cit., p. 585).
(++) Hilbert-Ackermann. Mathematical Logic, pp. 112-113.

propuesto procedimientos decisorios (*).

Si a esto se agrega que, como afirma Ackermann, "a semantic formulation is more convenient .... if we consider not only the problem of universal validity, but also the problem of determining the domains for which a given formula is valid or not valid" (**), se justifica que en lo que sigue se utilice exclusivamente la formulación semántica.

4. Cuando se formula semánticamente el problema de la decisión en la forma que se hizo en la sección anterior se habla del problema de la decisión para la validez. Pero el problema de la decisión, semánticamente encuadrado, puede también consistir en el de saber si puede establecerse algorítmicamente si una fbf arbitraria S pertenece o no a la clase L de las fórmulas consistentes o satisfactibles (*+). Se trata entonces del problema de la decisión para la consistencia o satisfactibilidad ("Erfüllbarkeit", "satisfiability").

Obsérvese que satisfactibilidad (o consistencia, que da lo mismo) y l-verdad son conceptos duales: una fórmula S es l-verda

---

(*) Esta preferencia cuenta con otra buena razón si es cierto que, tal como escribe Ackermann, "a syntactic formulation would have to be preceded by the proof of completeness for a certain system of axioms, which can only be done by semantic methods" (op. cit., p. vii).
(**) Loc. cit., Este pasaje de Ackermann se relaciona directamente con la cuestión del mayor o menor rigor con que para algunos tratadistas puede plantearse semánticamente el problema de la decisión. Hilbert y Ackermann, por ejemplo, escriben al respecto: "Mientras que en la versión más sencilla se trata únicamente de si una expresión es o no universalmente válida, en la versión más rigurosa han de darse, además, en caso de que la expresión no sea universalmente válida, los números cardinales de los campos en los que la expresión es válida, o en caso contrario ha de comprobarse que no existen números cardinales de este tipo" (op. cit., p. 140). Claro está que no es posible una formulación sintáctica de esta versión más rigurosa del problema de la decisión, la cual, conviene advertirlo, no es adoptada en este trabajo.
(*+) Véase la sección anterior.

dera o universalmente válida si y sólo si su contradictoria $\sim S$ no es satisfactible y, a la inversa, si tertium non datur, una fórmula S es satisfactible si y sólo si su contradictoria $\sim S$ no es 1-verdadera o universalmente válida (*). De manera que el problema de la decisión para la validez se puede reducir al de la decisión para la satisfactibilidad, y a la inversa (**).

En la práctica, como afirma Church, "every solution of a special case of either of these problems leads to a solution of a corresponding special case of the other, so that the two problems need not be considered separately" (*+). Y, además, los procedimientos o algoritmos a que dan respectivamente lugar los criterios de consistencia o satisfactibilidad y validez son también duales: "beiden erwähnten Arten von Entscheidungsverfahren sind aufeinander zurückführbar" (+*). Por este motivo "it is sufficient to treat one of them" (++).

Autores hay que optan por plantear el problema de la decisión sobre la base de la consistencia y otros prefieren hacerlo utilizando el criterio de validez. Hilbert y Bernays son del parecer que "für die Auffindung und Darstellung der Entscheidungsverfahren ist es im allgemeinem übersichtlicher, die Erfüllbarkeit von Formeln zu betrachten" (***). Pero esto de "übersichtlicher" ("más claro", "más fácil") no deja de ser controvertible, pues una afirmación de tal género, aparte de lo que tiene de subjetiva, supone conocer de antemano todos los procedimientos presentes y futuros basados en la noción de validez y saber

(*) Véase Hilbert-Bernays, op. cit., I, p. 128.
(**) "Die beiden Probleme sind sachlich gleichbedeutend".(Bernays-Schönfinkel, Entscheidungsproblem, p. 343). Véanse también Beth, op. cit., p. 585, y Hilbert-Ackermann, Grundzüge[2], II, 12.
(*+) Op. cit., p. 255.
(+*) Surányi, Reduktionstheorie, p. 31.
(++) Ackermann, op. cit., p. 10.
(***)Hilbert-Bernays, op. cit., I, p. 130.

que son de más difícil hallazgo y exposición que aquéllos que parten de la consistencia.

Ackermann, en cambio, aunque reconoce que "in some respects the concept of satisfiability is more easily handled when interpreting the well-formed formulas" (*), se inclina por considerar exclusivamente el punto de vista de la validez. "The reason is that the semantic truth definition of well-formed formulas we have given here may then be more conveniently brought into connection with a syntactical truth definition" (**).

Como, además, desde un punto de vista puramente didáctico, y dejando de lado el criterio de la facilidad, que no puede operar en abstracto, la formulación semántica para la validez permite proseguir más "naturalmente" el camino iniciado con el aprendizaje del procedimiento decisorio para establecer si un esquema molecular es o no tautológico, tal vez sea preferible a aquella sustentada en la noción de consistencia o satisfactibilidad.

Por tal motivo y en razón del objetivo propuesto, a partir de aquí el problema de la decisión será siempre formulado semánticamente respecto a la validez, sin que esto signifique otra cosa que la personal preferencia del autor de este trabajo.

5. El problema de la decisión en Lógica asume, desde el punto de vista de su solución, variadas características, esencialmente vinculadas al modo en que se constituye la clase C. Es por tanto conveniente ordenar las soluciones atendiendo a los diversos modos en que C puede estar formada (*+).

(*) Ackermann, op. cit., p. 10.
(**) Loc. cit.
(*+) En lo que sigue se pasan por alto ciertas distinciones y precisiones (v. g.: la diferencia entre dominios infinitos enumerables y no enumerables, la distinción entre cálculo funcional puro y aplicable, etc.) que ni conciernen a lo principal de este trabajo ni inciden sobre sus resultados. Quien desee obviar éstas y otras deliberadas omisiones debe consultar la clásica obra de W. Ackermann ya mencionada.

a) El problema de la decisión en la Lógica de las proposiciones sin analizar se plantea del modo siguiente: i) La clase C es la de los esquemas moleculares o truth-functions; ii) La clase L es la de los esquemas moleculares tautológicos o c-válidos; iii) Existe un esquema molecular arbitrario S, perteneciente a C; iv) Se trata de saber si existe o no un algoritmo o procedimiento decisorio que permita determinar si S pertenece o no a L, y, en caso de haberlo, cuáles son las instrucciones de que se compone.

Tal algoritmo existe y por ello se afirma que el problema de la decisión tiene solución positiva tratándose de esquemas moleculares. Como es más que sabido, tal algoritmo no es otro que el método de la tabla de valores, utilizado ya en varios casos especiales por Gottlob Frege en 1879 y elevado a procedimiento decisorio general por Charles Sanders Peirce en 1885.

b) En la Lógica cuantificacional de primer grado el problema se plantea así: i) Existe una clase C de fórmulas cuantificadas en que figuran cuantificadores, variables individuales ligadas (*), variables predicativas n-ádicas ($n \geq 1$) libres, y, eventualmente, conectivas, letras proposicionales y/o constantes individuales; ii) Existe una clase L de fórmulas cuantificadas l-verdaderas o válidas en un universo no vacío; iii) Existe una fórmula arbitraria S, bien formada; iv) Se trata de saber si existe o no un algoritmo para determinar si S pertenece

(*) En caso de que S posea una o más variables individuales sin ligar, antes de proceder a establecer su l-verdad es preciso cuantificarla universalmente respecto a dicha o dichas variables libres. Una cuantificación abierta es l-verdadera si y sólo si su cierre universal lo es. (Véase Quine, Métodos, pp. 199/200 y 263).

o no a L, y, de haberlo, cuáles son sus instrucciones(*).

Como ha demostrado Church, dicho algoritmo no existe, y es por tanto imposible decidir, en general, acerca de la validez de S (**). Pero existen soluciones positivas cuando S presenta configuraciones especiales.

1) Si, dado un esquema molecular tautológico, se substituyen sistemáticamente sus letras proposicionales (total o parcialmente) por fórmulas cuantificadas de la especie que fuere, el problema de la decisión para la fórmula cuantificada S así obtenida es soluble positivamente y S es válida (y, naturalmente, c-válida) (*+). En todo lo que ha de seguir, y salvo mención expresa, S nunca representará una fórmula c-válida.

2) Si S no posee variables predicativas sino únicamente variables individuales y sus operandos son "truth-functions" en que las letras proposicionales han sido reemplazadas por fórmulas de la forma 'x = y', se dice que S es una "fórmula con igualdades" ("equality formula") y el problema de la decisión para ella es soluble positivamente. El algoritmo decisorio proporciona las reglas para cons-

(*) En general, y esto vale para cualquier procedimiento decisorio de los tratados en esta tesis, cuando se quiere saber si una fórmula S es válida o 1-verdadera en un universo vacío basta substituir las cuantificaciones universales por V, las existenciales por F, y resolver "truth-functionally": S es válida si y sólo si se obtiene una V como resultado final. (Véanse Bernays-Schönfinkel, op. cit., p. 345, y Hilbert-Bernays, op. cit., I, p. 107).
(**) A Note. La demostración de Church no ha dejado de suscitar dudas, basadas en lo que él entiende por solución del problema de la decisión. Según Surányi (op. cit., p. 33) algunas investigaciones de L. Kalmár indican "dass es nicht richtig ist, den Satz von Church als einen Beweis für die absolute Unlösbarkeit des Entscheidungsproblem anzusehen", pero en la actualidad nadie parece discutir el resultado de Church.
(*+) Véase la sección 3, supra. En cambio, si la substitución se efectúa en S, reemplazando sus cuantificaciones por letras proposicionales, y el esquema resultante no es tautológico, nada se ha decidido sobre la validez de S.

truir otra fórmula, con ciertas características, llamada "reducida de S", y luego otras para determinar si la correspondiente reducida es o no universalmente válida. S es válida si y sólo si su reducida lo es (*). En este trabajo no se tratará de la decisión de "equality formulas".

3) Si S no posee sino variables predicativas monádicas (n = 1) (**), el problema de la decisión es soluble positivamente, sea D finito o infinito: en Lógica Cuantificacional monádica, por tanto, puede existir y en efecto existe un procedimiento decisorio que hace posible la determinación de la 1-verdad de cualquier fbf que pertenezca a ella.

Fué Leopold Löwenheim, en 1915, quien probó por vez primera que esta clase de fórmulas eran decidibles, y pruebas más simples fueron ofrecidas más tarde por Thoralf Skolem y Heinrich Behmann, si bien, como afirma Ackermann, "the three authors could make use of the preparatory work of E. Schröder in the first and second volume of his 'Algebra of Logic' " (*+). En cuanto a los procedimientos mismos, deben mencionarse, entre otros menos recientes o representativos, los de P. Bernays y M. Schönfinkel (+*),

---

(*) Véase Ackermann, op. cit., capítulo III, passim.
(**) Si, además, poseyese signos de igualdad, S será reducible a otra fórmula equivalente S', en la que habrá de aparecer forzosamente, agregada a las monádicas, una variables predicativa diádica. (Véase Ackermann, op. cit., V, 3). El caso de estas fórmulas se contempla, como es obvio, dentro de las n-ádicas (n > 1).
(*+) Ackermann, op. cit., p. 34.
(+*) Como se ha de apreciar en el capítulo VI, infra, este procedimiento permite la solución del problema de la decisión de las fórmulas monádicas, tanto en su versión débil como en su versión rigurosa (véase la sección 3, supra).

W. V. O. Quine (*), G. H. Von Wright y S. C. Kleene (**), basados todos ellos en la reducción del problema de la decisión para la validez a otro para la c-validez. Estos procedimientos, que serán expuestos detalladamente en los capítulos siguientes, lo mismo que otro propuesto por el sustentante, han sido seleccionados justamente por poseer la característica común aludida, que permite su utilización y enseñanza como el obligado paso adelante respecto a la Lógica Proposicional, que se desarrolla a nivel elemental con el auxilio casi exclusivo de la tabla de valores (*+).

4) Si en S aparecen letras o variables predicativas n-ádicas ($n > 1$) y el dominio D es finito, el problema también es soluble positivamente y existe el algoritmo requerido. Un procedimiento especialmente indicado es el de Bernays y Schönfinkel a que se ha hecho referencia en el inciso anterior.

5) Si en S aparecen variables predicativas n-ádicas ($n > 1$) y el dominio D es infinito, el problema tiene solución positiva sólo en ciertos casos especiales o típicos.

(*) Quine ha concebido, entre 1944 y 1950, hasta tres métodos distintos, que se denominarán en lo sucesivo, por razones de comodidad, QS, QL y QM. El primero se halla expuesto en O Sentido (1944), el segundo en el artículo "On the Logic of Quantification" (1945), y el tercero en su conocido libro "Methods of Logic"(1950).
(**) Este procedimiento, tal como aparece expuesto en "Introduction to Metamathematics" (1952), es propiamente decisorio sólo para la r-validez, pero, con las debidas adiciones, lo es también para la validez universal, y por ello se le incluye en este trabajo.
(*+) No se tomarán en cuenta en este trabajo ni el método de "tableaux sémantiques", debido a E. W. Beth, ni aquellos que existen o puedan existir en las lógicas constructivas y en las que siguen la dirección de G. Gentzen, puesto que, a diferencia de los citados en el texto, o no apelan directamente al procedimiento de evaluación tabular, o sus supuestos sistemáticos son de tal manera diversos que en realidad merecen un estudio por separado.

P. Bernays y M. Schönfinkel resolvieron el problema de la decisión para las siguientes formas normales prenex (siempre que en la matriz no ocurran ni signos de igualdad ni variables individuales libres)(*):

$$(x_1)(x_2).....(x_r)\emptyset(x_1,x_2,.....,x_r)$$

$$(\exists x_1)(\exists x_2)....(\exists x_m)\emptyset(x_1,x_2,....,x_m)$$

$$(x_1)(x_2)...(x_r)(\exists y_1)(\exists y_2)...(\exists y_m)\emptyset(x_1,x_2,...,x_r,y_1,y_2,...,y_m)$$

Ackermann y Skolem, por separado, demostraron la solubilidad de la forma normal prenex

$$(x_1).....(x_r)(\exists y)(z_1)....(z_n)\emptyset(x_1,....,x_r,y_1,z_1,....z_n),$$

donde la matriz ha de contener únicamente variables predicativas diádicas (**).

Gödel, Kalmár y Schütte, independientemente, han probado que es soluble el problema de la decisión para S cuando ésta no contiene signos de igualdad y es reducible a la forma normal prenex

$$(x_1)...(x_r)(\exists y_1)(\exists y_2)(z_1)...(z_n)\emptyset(x_1,...x_r,y_1,y_2,z_1,...z_n)(+).$$

El mismo Kalmár y Surányi, por el contrario, han demostrado que no existe solución para las siguientes formas prenex:

$$(\exists y_1)(\exists y_2)(\exists y_3)(x_1)....(x_r)\emptyset(y_1,y_2,y_3,x_1,...,x_r)$$

$$(\exists y_1)(\exists y_2)(x_1)...(x_r)(\exists y_3)\emptyset(y_1,y_2,x_1,...,x_r,y_3)$$

$$(x_1)(\exists y_1)(x_2)(\exists y_2)....(\exists y_n)\emptyset(x_1,y_1,x_2,y_2,....,y_n)(++)$$

(*) Bernays - Schönfinkel, op. cit.
(**) Ackermann, op. cit., p. 72. La técnica de solución consiste, como en el caso siguiente, en reducir la fórmula dada a otra monádica, aplicando luego a ésta alguno de los algoritmos conocidos.
(+) Ibid., p. 75.
(++) Ibid., p. 61.

Otros casos han sido resueltos tomando en cuenta, no ya el prefijo de la respectiva forma normal prenex, sino estructuras especiales de la matriz y el número y carácter de las variables predicativas que aparecen en ella (*).

c) Las fbfs de la Lógica Cuantificacional de segundo grado (o generalizada, como la llaman Hilbert y sus seguidores) son las ya conocidas, más otras en que aparecen variables predicativas ligadas. De manera, pues, que si en la Lógica de primer grado el problema de la decisión se resuelve, en general, negativamente, en la Lógica generalizada dicho problema habrá de resolverse también negativamente(**).

Pero existen soluciones parciales: Löwenheim, Skolem y Behmann han resuelto completamente el problema de la decisión para la clase de las fórmulas correspondientes a este nivel, siempre que aparezcan en ellas sólo variables predicativas monádicas (ligadas) (+). En este caso es posible eliminar sucesivamente todas las variables predicativas, obteniéndose así una fórmula equivalente en que sólo figuran variables individuales, conectivas e igualdades, y que, como se vió en el inc. b 2 supra, es decidible.

6. Antes de pasar a estudiar, en los capítulos siguientes, los procedimientos decisorios para fórmulas monádicas de primer grado, se expone en seguida, para facilidad del lector, la terminología empleada en la presente tesis, y se proporcionan, de manera informal, las reglas de constitución de las fórmulas bien formadas a que atañen los citados procedimientos.

(*) Ibid., p. 85 y ss., passim.
(**) Hilbert-Ackermann, Grundzüge[2], IV, 1.
(+) Ackermann, op. cit., IV. 3.

a) Una letra proposicional es una fórmula (elemental).

b) Si 'α' es una letra o variable predicativa y 'x_i' ($1 \leq i \leq n$) una variable individual, '$\alpha x_1 x_2 \ldots x_n$' es una fórmula (predicativa) elemental n-ádica, y 'α' una letra o variable predicativa n-ádica. Cuando n = 1 (v.g: 'αx'), 'α' es una letra o variable predicativa monádica, y en tal caso la fórmula (predicativa) elemental es también monádica. Cuando en vez de variables individuales aparezcan en una fórmula (predicativa) elemental constantes individuales 'a_i', la expresión es también una fórmula y se denominará fórmula (predicativa) elemental (n-ádica) con constantes individuales. Las letras predicativas se representarán usualmente mediante 'f', 'g', 'h',.....; las variables individuales mediante 'x', 'y', 'z',.....; y las constantes individuales por medio de 'a', 'b', 'c',..... .

c) Si A es una fórmula, $\sim$A es también una fórmula (molecular).

d) Si A y B son fórmulas, A.B, A ∨ B, A ⊃ B y A ≡ B son fórmulas (moleculares). A y B se denominan "componentes" de la respectiva fórmula molecular ("k-componentes" en el caso de A.B, y "d-componentes" en el de A ∨ B). Los signos '∼', '.', '∨', '⊃' y '≡' se denominan "conectivas"(*).

e) Una fórmula elemental o una fórmula compuesta exclusivamente por fórmulas elementales y conectivas es una "fórmula predicativa abierta". Si en una fórmula predicativa abierta la o las fórmulas elementales son exclusivamente letras proposicionales, la fórmula es una "truth-function"

(*) La jerarquía entre las conectivas se suele indicar mediante el uso de paréntesis (en el caso de la negación) y de puntos auxiliares (en el de las demás conectivas), y así se hace en esta tesis, que utiliza, con ligerísimas modificaciones, la notación empleada por W. V. O. Quine en Methods of Logic.

o "esquema molecular". Cuando en una fórmula predicativa abierta '~' antecede inmediatamente, en todas sus ocurrencias, a fórmulas elementales, se dice que '~' se halla "internada".

f) Si 'Ø(x)'es una fórmula donde aparece por lo menos una fórmula elemental monádica con variable individual 'x', '(Ux)Ø(x)' y '(Ǝx)Ø(x)' son también fórmulas ("cuantificaciones" monádicas)(*).

'Ø(x)' se denomina, en este caso, "operando" o "alcance", y se escribe entre paréntesis, salvo que se componga de una sola fórmula elemental, negada o no. '(Ux)' (**) y '(Ǝx)' son los "cuantificadores", universal y existencial respectivamente, con respecto a 'x', y a ellos se hará referencia con las expresiones "U-" y "E-cuantificadores". Toda fórmula en que figure por lo menos un cuantificador es una "fórmula cuantificada".

Si una variable 'x' (+) aparece en el operando pero no en el correspondiente cuantificador, se dice que la variable está "libre" (en esa ocurrencia) y la cuantificación "abierta". Pero si aparece tanto en el operando como en el respectivo cuantificador, la variable está "ligada" (en esa ocurrencia), y la cuantificación "cerrada" si y sólo si todas las variables que en ella figuran están ligadas. "Cerrar" una fórmula cuantificada o una fórmula predicativa abierta consistirá entonces en encerrar entre paréntesis a la fórmula dada y escribir a su

(*) Todo lo que se dice en este inciso y en los siguientes es aplicable, con las indispensables modificaciones, a fórmulas n-ádicas en general.
(**) En los casos en que no sea precisa la expresión correcta se escribirá '(x)' en vez de '(Ux)'.
(+) Nada obsta para suprimir, en lo sucesivo, el calificativo "individual" cuando se trate de una variable individual, pues en la Lógica de primer grado las variables predicativas pueden ser tenidas, para todo efecto práctico, como constantes (predicativas).

izquierda tantos cuantificadores universales cuantas variables libres aparezcan dentro del paréntesis; de esta manera todas las variables individuales de la cuantificación obtenida se hallarán ligadas.

Si A es una fórmula en la que no aparece 'x', '(Ux)A' y '(Ǝx)A' son cuantificaciones vacías; en este caso deben suprimirse, por superfluos, los cuantificadores.

g) Si en 'Øx' no aparecen cuantificadores, '(x)Øx' y '(Ǝx)Øx' son "cuantificaciones simples", y "complejas" en caso contrario. "Cuantificación básica", en sentido estricto, es aquella cuantificación simple en cuyo operando no aparecen variables libres, letras proposicionales ni constantes individuales (*). A es una "fórmula (cuantificada) básica" si y sólo si está constituída por: a) una cuantificación básica; o b) cuantificaciones básicas y conectivas; o c) cuantificaciones básicas, letras proposicionales y conectivas (**). En caso de que una fórmula cuantificada básica posea más de una cuantificación básica y en dos o más de éstas la variable de cuantificación sea distinta, conviene substituir todas las variables de la fórmula por una sola. Se dice entonces que se ha "unificado" la variable. Cuando en una fórmula cuantificada

---

(*) En el capítulo VIII, infra, se habrá de considerar básica, en sentido lato, la cuantificación que exhibe, además de la variable de cuantificación, letras proposicionales y/o constantes individuales. En los demás capítulos, salvo mención expresa, "cuantificación básica" deberá entenderse en su sentido estricto. Adviértase también que para Quine, en el artículo "On the Logic of Quantification" (que se estudia en el capítulo III, infra), una cuantificación es básica cuando, aparte de los requisitos ya indicados, el cuantificador es universal.

(**) Para los efectos del procedimiento decisorio que se expone en el capítulo VIII, infra, una fórmula sigue siendo básica aun en el caso de exhibir, fuera de sus cuantificaciones básicas, fórmulas elementales con constantes individuales.

'$\sim$' figura únicamente dentro de los operandos, se dice que en dicha fórmula '$\sim$' se encuentra "internada".

h) Si '$\emptyset(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n)$' es una fórmula en que aparecen las variables 'x_1', 'x_2',......,'x_n', y '(Qx_1)' un U- o E-cuantificador, $(Qx_1)(Qx_2)\ldots(Qx_n)\emptyset(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n)$ es una fórmula, y se denomina, si '$\emptyset(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n)$' carece de cuantificadores, "forma normal prenex"; '$\emptyset(x_1,x_2,\ldots,x_n)$' será la"matriz" de la forma normal prenex y "prefijo" el conjunto de cuantificadores que la precede (*). En este caso el operando de cada cuantificador abarcará toda aquella parte de la fórmula que aparece inmediatamente a su derecha, de manera que cada cuantificador, salvo el primero, se hallará dentro del operando de aquél que aparece a su izquierda.

El prefijo de una forma normal prenex será "propio": a) cuando todos los U-cuantificadores precedan a los E-cuantificadores; o b) cuando sólo posea U-cuantificadores; o c) cuando sólo posea E-cuantificadores.

(*) Conviene a veces escribir los prefijos en forma compendiada. Así, por ejemplo, '$(x_1)(x_2)\ldots\ldots(x_n)$' se podrá escribir '$(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n)$'.

C A P I T U L O   II

El Procedimiento QS

1. El primer procedimiento decisorio que Quine haya dado a la publicidad, si no yerra el autor de esta tesis, es, como se dijo, el que aparece en "O Sentido da Nova Logica" (*). Según el propio Quine, es "debido principalmente a Herbrand" (**), pero es posible apreciar una estrecha relación entre su idea básica y algunas ideas ya expuestas con mucha anterioridad por Behmann (op. cit., § 10). En lo sucesivo se le denominará procedimiento QS.

Afirma Quine que QS es un "criterio mecánico" que sirve para decidir en general "si las matrices representadas por un esquema [monádico] dado son válidas" (+). Si se tomara al pie de la letra esta caracterización, QS, por ser sólo eso, no podría ser considerado sino "medio procedimiento decisorio", ya que ni mecánico es sinónimo de decisorio, ni figura en el texto de O Sentido nada que permita suponer que sirva también para decidir si dichas matrices - de ser el caso - no son válidas (++).

Sin embargo, como el procedimiento se reduce, a fin de cuentas, al método tabular de evaluación de "truth-functions", y éste constituye un procedimiento efectivo para determinar tanto la validez como la invalidez de dichas fórmulas, QS es en realidad un procedimiento decisorio.

2. En la terminología de Sentido, "una matriz es un enunciado o bien puede convertirse en un enunciado (.........) por la a-

---

(*) Existe una traducción al castellano, hecha por Mario Bunge ("El Sentido de la nueva Lógica". Buenos Aires, Editorial Nueva Visión, 1958), a la cual se referirán todas las citas que en lo sucesivo se hagan de O Sentido.
(**) Métodos, p. 170, n.1.
(+) Sentido, p. 94.
(++) Véanse 1.2, supra, y Apéndice I.

plicación de uno o más cuantificadores" (Sentido, p. 61) y enunciados, a su vez, son expresiones "sin pronombres (*) libres" (ibid., p. 68).

"Matriz", más precisamente, significa en Sentido:

a) Una fórmula elemental (es decir, una letra predicativa seguida por una o varias variables individuales), negada o no; b) La conjunción, negada o no, de fórmulas elementales, negadas o no (**); c) La fórmula compuesta por uno o más cuantificadores, negados o no, **seguidos** por una matriz en sentido estricto (+), negada o no ("cuantificativo", como se la denomina en Sentido, p. 55); y d) La fórmula compuesta por un cuantificativo, negado o no, o por la conjunción, negada o no, de varios cuantificativos, negados o no.

Así, por ejemplo, son matrices

'∼(x)∼(fx.∼gx).(x)fx.∼(x)gx' (ibid., p. 73),

'∼((x)fx.(x)gx.∼(x)gx)' (loc. cit.),

'∼((x)(fx.gx).∼(x)gx)' (loc. cit.),

'∼((x)(y)fxy.∼(y)(x)fxy)' (ibid., p. 82),

y también lo son, pero en sentido estricto, 'fy' (ibid.,p.78) y '∼(fx.∼fx.gx)' (ibid., p. 75).

Quine distingue expresamente entre esquema y matriz (++):

(*) "Las letras 'x', 'y', etc., auxiliares de la notación cuantificacional, se llamarán pronombres lógicos" (ibid., p. 58). En lo sucesivo serán denominadas "variables individuales" o simplemente "variables", no por ser ésta una mejor designación, ni mucho menos, sino por gozar dicho término de máxima difusión.

(**) En tal caso, como en el anterior, se dirá que se trata de una matriz en sentido estricto. En esta clase de matrices pueden aparecer eventualmente, en vez de una fórmula elemental, tanto una letra proposicional como un cuantificativo. Véase esta misma sección, infra.

(+) En este caso la matriz toma el nombre, muy conocido, de "operando" o "alcance".

(++) Ibid., p. 61 y ss.

denomina esquemas a "las expresiones del tipo '$\sim$(p. $\sim$ q)' que se emplean en la teoría de la composición (*) y en las que aparecen las letras 'p', 'q', etc. "(es decir, truth-functions), y matrices a "las expresiones del tipo '(x = y)', '(y = y)', 'x es combustible', '$\sim$ x es combustible', etc., a las que se acostumbra aplicar cuantificadores". Pero como en la página 94 habla de "esquemas que tienen la forma de matriz" y de "matrices representadas por un esquema", parecería que 'esquema' debe tener para el autor alguna otra acepción que no es la del pasaje pertinente ya citado. En lo que sigue, sin embargo, y dejando sin dilucidar lo que parece constituir una clara indecisión terminológica, 'esquema' deberá dar a entender, además de truth-function, una expresión con forma de matriz. Esquema será, por tanto, cualquiera de las fórmulas que aparecen en el aparte anterior.

'Esquemas monádicos', a su vez, de acuerdo a la definición que proporciona su autor (**), son aquellos que cumplen los siguientes requisitos:

a) "Sólo exhiben 'x' como pronombre" (esto es, como variable).

b) "Carecen de pronombres libres" (esto es, todas las ocurrencias de la variable están ligadas).

c) "El cuantificador '(x)' que figura en un esquema monádico nunca se repite dentro de su propio alcance a la manera de '(x)(........(x)fx........)' " (esto es, en ningún operando aparecen cuantificativos).

Como ejemplos de "típicos esquemas monádicos" (loc. cit.) el autor señala los siguientes:

(*) Así llamaba entonces Quine a la Lógica de las proposiciones sin analizar.

(**) Ibid., p. 94.

$\sim ((x)fx . (x) \sim fx)$ (p. 71,B)
$\sim ((x) \sim (fx . \sim gx) . (x)fx . \sim (x)gx)$ (p. 73,C)
$\sim (\sim (x) \sim (fx . gx) . (x) \sim fx)$ (p. 75,D)
$\sim (\sim p . \sim (x)fx . \sim (x) \sim (p . \sim fx))$ (*) (p. 80,E)
$\sim ((x) \sim (gx . hx) . (x) \sim (fx . gx) . \sim (x) \sim (fx . hx))$ (p. 86,H)
$\sim ((x) \sim (gx . \sim hx) . (x) \sim (gx . fx) . \sim (x) \sim gx . (x) \sim (fx . hx))$ (p. 88,I)
$\sim (\sim (p . \sim (x)fx) . p . \sim (x)fx)$ (*) (p. 96)

No deben considerarse como esquemas monádicos las siguientes fórmulas:

$\sim ((x)fx . \sim fy)$ (p. 68,A)
$\sim ((x)(y)fxy . \sim (y)(x)fxy)$ (p. 82,F)
$\sim (\sim (y) \sim (x) \sim fxy . \sim (x) \sim (y)fxy)$ (p. 85,G)

3. Existe un "criterio mecánico" (**), en el caso de los esquemas monádicos, para "decidir, en general, si las matrices representadas por un esquema (+) dado son válidas" (ibid., p. 94). Aunque nada se diga explícitamente, se da por convenido que el universo no es vacío y que no se tratará de la decisión de esquemas monádicos composicionalmente válidos, como, por ejemplo, '$\sim ((x)(fx . \sim gx) . (x)(hx . \sim fx) . \sim (x)(fx . \sim gx))$', que es válido por resultar de la substitución ordenada y completa de 'p' y 'q' en el esquema tautológico '$\sim (p.q . \sim p)$' por '$(x)(fx . \sim gx)$' y '$(x)(hx . \sim fx)$', respectivamente. (++)

Sea S un esquema monádico cuyas letras predicativas son 'f', 'g',.... y que carece de letras proposicionales. Para "probar su validez" (ibid., p. 95) debe procederse primero a

---

(*) 'p' representa en esta fórmula una matriz "que no contiene 'x' como pronombre libre" (loc. cit.).

(**) "Procedimiento" sería un término más adecuado. Téngase presente, además, que no es lo mecánico lo esencial de un procedimiento decisorio.

(+) Debe leerse "esquema monádico".

(++) Esta doble estipulación se extiende a los demás procedimientos que se examinarán en los capítulos siguientes. Véase, sin embargo, la sección 9, infra.

transformarlo previamente en lo que Church ha denominado "forma normal de Quine" (*) y que se mencionará abreviadamente con la letra 'C', procediéndose luego a evaluar tabularmente la expresión '$\sim(A.\sim C)$', donde 'A' representa un esquema que luego se describirá, y a interpretar el resultado obtenido. Este proceso, en detalle, incluye las fases siguientes: (**)

a) Transformación previa de S, mediante conocidas equivalencias de la Lógica Proposicional, en un esquema monádico que sólo posea las conectivas '.' y '$\sim$'. Sea S, por ejemplo,

$$(x)(fx \supset gx).(x)(gx \supset hx). \supset .(x)(fx \supset hx).$$

Modificándolo de acuerdo a lo prescrito, se tiene

$$\sim[(x)\sim(fx.\sim gx).(x)\sim(gx.\sim hx).\sim(x)\sim(fx.\sim hx)]. \qquad S_1$$

b) Substitución de todos los cuantificadores existenciales que puedan aparecer en S por el cuantificador universal, de acuerdo a conocidas reglas de intercambio de cuantificadores.

c) Modificación de cada uno de los cuantificativos simples de S_1 a fin de permitir que cada uno de ellos

---

(*) Review, p. 59. Poco después advirtió que era una denominación incorrecta "since it was first used....by Herbrand" (JSL 15, 1950, p. 199). Tal vez haya sido Herbrand el primero en usarla, pero Behmann (op. cit., § 10), a propósito del problema de la decisión de fórmulas monádicas, describe una que es fundamentalmente la misma. Kneale and Kneale (Development, p. 726) la atribuyen al autor alemán y es muy probable que tengan razón (aunque en su tesis de Bachiller el sustentante no lo creyó así).
(**) Las dos primeras, que no aparecen en Sentido, son añadidas aquí dada la necesidad de llevar cualquier esquema monádico a la especialísima forma en que Quine escribía entonces los esquemas monádicos: utilizando únicamente el cuantificador universal y las conectivas '.' y '$\sim$'. Como es natural, la obligación de cumplirlas depende exclusivamente de la constitución de S.

exhiba todas las letras predicativas que aparecen en S_1. (Ninguno de los tres que integran el esquema usado como ejemplo posee en su respectivo operando las tres letras predicativas 'f', 'g' y 'h').

La modificación prescrita consiste en "completar" cada operando que lo requiera, uniéndole por conjunción tantos esquemas de la forma '$\sim(\alpha x \,.\sim \alpha x)$', en la que '$\alpha$' representa la letra predicativa requerida, cuantos fueren menester (*). El primer cuantificativo de S_1, por ejemplo, quedará transformado en

'(x)~[fx.~gx.~(hx.~hx)]' ,

el segundo en '(x)~[gx.~hx.~(fx.~fx)]' ,

y el tercero en '(x)~[fx.~hx.~(gx.~gx)]' .

d) Reemplazo de cada uno de los operandos ya "completos" por lo que Quine titula su forma canónica, esto es, una conjunción de conjunciones negadas, debiendo exhibir cada una de éstas, sólo una vez, y ordenadas alfabéticamente, todas las letras predicativas, negadas o no individualmente (**).

Examínese el primer cuantificativo, ya "completado", de S_1. Su operando no se halla en forma canónica y debe por tanto ser reducido a ella mediante el procedimiento expuesto por el autor (+) y que se explica a continuación:

1) Evalúese tabularmente el operando

'~[fx.~gx.~(hx.~hx)]'.

Así se obtiene la siguiente tabla:

(*) Esta transformación no es otra que la operación denominada por Quine "intercambio de equivalentes composicionales" (Ibid., p. 76) y se justifica fácilmente recordando la ley 'p. V eq. p'.

(**) Véase Sentido, p. 26/28 y p. 94. Se trata en realidad de una forma normal conjuntiva, donde 'p', 'q', etc. se hallan reemplazadas por fórmulas elementales.

(+) Ibid., p. 94.

fx	gx	hx	$\sim$ [fx	. $\sim$ gx	. $\sim$ (hx	. $\sim$ hx)]
V	V	V	V V	F	F V	
V	V	F	V V	F	F V	
V	F	V	F V	V	V V	
V	F	F	F V	V	V V	
F	V	V	V F	F	F V	
F	V	F	V F	F	F V	
F	F	V	V F	V	F V	
F	F	F	V F	V	F V	

2) Considérense los valores de 'fx', 'gx' y 'hx' sólo en los arreglos que han resultado falsos:

fx	gx	hx
V	F	V
V	F	F

3) Construyanse tantas conjunciones con 'fx', 'gx' y 'hx' como arreglos falsos hayan resultado (*), negando tales componentes donde aparecen como falsos en el correspondiente arreglo, según el cuadro anterior:

fx . $\sim$ gx . hx

fx . $\sim$ gx . $\sim$ hx

4) Niéguese cada una de estas conjunciones y únanse a su vez mediante conjunción. El esquema así obtenido

$\sim$ (fx . $\sim$ gx . hx) . $\sim$ (fx . $\sim$ gx . $\sim$ hx)

será la forma canónica buscada y el **primer cuanti-**

(*) En caso de resultar c-válido el operando cuya forma canónica se trata de hallar, ésta se obtiene mediante un procedimiento especial. (Véase la sección 5, infra).

ficativo quedará convertido en su equivalente

$$(x)[\sim(fx \,.\, \sim gx \,.\, hx) \,.\, \sim(fx \,.\, gx \,.\, \sim hx)] \,.$$

En forma similar se obtienen las formas canónicas de los operandos de los cuantificativos restantes, las mismas que son

$$(x)[\sim(fx \,.\, gx \,.\, \sim hx) \,.\, \sim(\sim fx \,.\, gx \,.\, \sim hx)]$$

y

$$\sim(x)[\sim(fx \,.\, gx \,.\, \sim hx) \,.\, \sim(fx \,.\, \sim gx \,.\, \sim hx)] \,.$$

e) Distribución de los cuantificadores, es decir, todo cuantificativo de la forma '$(x)(\sim \emptyset x \,.\, \sim \emptyset' x \ldots)$' deberá ser reemplazado por una conjunción de la forma '$(x) \sim \emptyset x \,.\, (x) \sim \emptyset' x \ldots$' (*), que será la <u>forma normal</u> del respectivo cuantificativo. De modo que las formas normales de los tres cuantificativos de S_1 serán, respectivamente,

$$(x) \sim (fx \,.\, \sim gx \,.\, hx) \,.\, (x) \sim (fx \,.\, \sim gx \,.\, \sim hx),$$

$$(x) \sim (fx \,.\, gx \,.\, \sim hx) \,.\, (x) \sim (\sim fx \,.\, gx \,.\, \sim hx)$$

y

$$\sim [(x) \sim (fx \,.\, gx \,.\, \sim hx) \,.\, (x) \sim (fx \,.\, \sim gx \,.\, \sim hx)] \,.$$

Substituyendo ahora cada cuantificativo de S por su correspondiente forma normal se obtiene

---

(*) Obsérvese que cada uno de los componentes de la forma normal de un cuantificativo es siempre un cuantificador universal, negado o no, seguido por una de las conjunciones negadas que forman parte de la forma canónica del operando de dicho cuantificativo. Ejemplos de estos componentes, que conviene denominar "cuantificativos típicos", son '$\sim (x) \sim (fx \,.\, gx \,.\, hx)$', '$(x) \sim (fx \,.\, gx)$', '$(x) \sim fx$', '$\sim (x) fx$' [$= \sim (x) \sim (\sim fx)$] .

$$\begin{array}{l}\sim\{(x)\sim(fx.\sim gx.hx).(x)\sim(fx.\sim gx.\sim hx).\\ .(x)\sim(fx.gx.\sim hx).(x)\sim(\sim fx.gx.\sim hx)\ .\\ .\sim[(x)\sim(fx.gx.\sim hx).(x)\sim(fx.\sim gx.\sim hx)]\}\ ,\qquad C\end{array}$$

C, que se compone exclusivamente de cuantificativos típicos, es el esquema o forma normal de S_1. No hay necesidad de ir más allá en la transformación de S_1 y lo único que resta ahora es proceder al paso siguiente.

f) Determinación de la c-validez del condicional '$\sim(A.\sim C)$', donde A representa, para el caso del ejemplo, el esquema

$$\begin{array}{l}\sim[(x)\sim(fx.gx.hx).(x)\sim(fx.gx.\sim hx).\\ .(x)\sim(fx.\sim gx.hx).(x)\sim(fx.\sim hx.\sim hx).\\ .(x)\sim(\sim fx.gx.hx).(x)\sim(\sim fx.gx.\sim hx).\\ .(x)\sim(\sim fx.\sim gx.hx).(x)\sim(\sim fx.\sim gx.\sim hx)]\qquad (*),\end{array}$$

para saber si A c-implica a C. Si así fuere, C será válido, como habrá de serlo, entonces, su equivalente S. Es por tanto indispensable evaluar el esquema

$$\begin{array}{l}\sim\{\sim[(x)\sim(fx.gx.hx).(x)\sim(fx.gx.\sim hx).\\ .(x)\sim(fx.\sim gx.hx).(x)\sim(fx.\sim gx.\sim hx)\\ .(x)\sim(\sim fx.gx.hx).(x)\sim(\sim fx.gx.\sim hx)\\ .(x)\sim(\sim fx.\sim gx.hx).(x)\sim(\sim fx.\sim gx.\sim hx)]\\ .[(x)\sim(fx.\sim gx.hx).(x)\sim(fx.\sim gx.\sim hx)\\ .(x)\sim(fx.gx.\sim hx).(x)\sim(\sim fx.gx.\sim hx)\\ .\sim((x)\sim(fx.gx.\sim hx).(x)\sim(fx.\sim gx.\sim hx))]\}.\end{array}$$

(*) En general, si n es el número de letras predicativas que aparecen en S, A es la negación de la conjunción de los 2^n distintos cuantificativos típicos que se pueden formar con n letras predicativas. No es difícil ver cómo A está constituída de tal manera que si se eliminan los cuantificadores y se aplica la equivalencia de De Morgan, A resulta ser la forma normal disyuntiva perfecta de un esquema tautológico, en el que 'fx', 'gx', 'hx',....... hacen las veces de letras proposicionales .

No es preciso aquí, por suerte, efectuar toda la tabla, pues teniendo en cuenta únicamente el consecuente C y substituyendo los cuantificativos que la integran por 'p', 'q', etc., se obtiene

$$\sim[p.q.r.s.\sim(r.q)] \;,$$

que es un esquema c-válido, como se puede establecer fácilmente. De manera que '$\sim(A.\sim C)$' es también c-válido, puesto que todo condicional cuyo consecuente es c-válido es él mismo c-válido, y C está c-implicado por A. Por ello C es válido y S, su equivalente, también lo es, Se ha llegado así a la decisión buscada (*).

4. Se resuelven a continuación algunos problemas de decisión para esquemas monádicos bastante simples, lo que servirá para ilustrar adecuadamente la aplicación de QS.

I) $$(x)fx \supset (\exists x)fx \qquad S$$

Reduciendo a la notación de Sentido:

$$\sim[(x)fx.\sim(\exists x)fx] \qquad S_1$$
$$\sim[(x)fx.(x)\sim fx]$$

S_1 se halla en forma normal C, de manera que sólo hace falta construir el condicional para la decisión, que es:

$$\sim[\sim\{(x)\sim fx.(x)\sim\sim fx\}.\sim\sim\{(x)fx.(x)\sim fx\}]. \qquad \sim(A.\sim C)$$

Eliminando las dobles negaciones se obtiene

$$\sim[\sim\{(x)\sim fx.(x)fx\}.\{(x)fx.(x)\sim fx\}] \;,$$

y, echando mano a letras proposicionales,

$$\sim[\sim(p.q).q.p] \;.$$

(*) Es posible, como ilustra el ejemplo del texto, simplificar este último paso de QS. Cuando C sea c-válido no será preciso evaluar '$\sim(A.\sim C)$', pero de no serlo, esta evaluación no puede dejar de efectuarse (Sentido, § 30, passim). Sobre este punto, tratado in extenso, véase la sección 9, infra.

A implica a C y por lo tanto S es válido o 1-verdadero.

II) $(\exists x)fx \supset (x)fx$ S

$\sim[(\exists x)fx . \sim (x)fx]$ S_1

$\sim[\sim (x) \sim fx . \sim (x)fx]$

Como en el ejemplo anterior, S_1 se halla en forma normal C. Construyendo y evaluando el condicional para la decisión:

$\sim[\sim \{(x)\sim fx . (x)\sim\sim fx\} . \sim\sim \{\sim (x) \sim fx . \sim (x)fx\}]$ $\sim(A.\sim C)$

$\sim[\sim \{(x)\sim fx . (x)fx\} . \{\sim (x) \sim fx . \sim (x)fx\}]$

$\sim[\sim (p . q) . \sim q . p]$

A no c-implica a C. S, en consecuencia, no es válido.

III) $(\exists x)(fx . gx) . (\exists x)(gx . hx) . \supset . (\exists x)(fx . hx)$ S

$\sim[\sim (x)\sim (fx . gx) . \sim (x) \sim (gx . hx) . (x) \sim (fx . hx)]$ S_1

Buscando las formas canónicas de los operandos de los cuantificativos que exhibe S_1 y distribuyendo luego los cuantificadores para obtener las formas normales de cada uno de aquellos:

a)

fx	gx	hx	~ (fx . gx)	. ~	(hx . ~ hx)
V	V	V	F	V	F V
V	V	F	F	V	F V
V	F	V	V	F	V V
V	F	F	V	F	V V
F	V	V	V	F	V V
F	V	F	V	F	V V
F	F	V	V	F	V V
F	F	F	V	F	V V

$\sim(x)[\sim (fx . gx . hx) . \sim (fx . gx . \sim hx)]$ FC_1

$\sim[(x) \sim (fx . gx . hx) . (x)\sim (fx . gx . \sim hx)]$ Q_1

b)

fx . gx . hx			∼ (gx . hx) . ∼ (fx . ∼ fx)			
V	V	V	F	V	F	V
V	V	F	F	V	F	V
V	F	V	V	F	V	V
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	F	V	V

$\sim(x)[\sim(fx . gx . hx) . \sim(\sim fx . gx . hx)]$ FC_2

$\sim[(x)\sim(fx . gx . hx) . (x)\sim(\sim fx . gx . hx)]$ Q_2

c)

fx . gx . hx			∼ (fx . hx) . ∼ (gx . ∼ gx)			
V	V	V	F	V	F	V
V	V	F	F	V	F	V
V	F	V	V	F	V	V
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	F	V	V

$(x)[\sim(fx . gx . hx) . \sim(fx . \sim gx . hx)]$ FC_3

$(x)\sim(fx . gx . hx) . (x)\sim(fx . \sim gx . hx)$ Q_3

Substituyendo los cuantificativos de S_1 por sus respectivas formas normales Q_1, Q_2 y Q_3 :

$$\sim[\sim\{(x)\sim(fx . gx . hx) . (x)\sim(fx . gx . \sim hx)\} . \sim\{(x)\sim(fx . gx . hx) . (x)\sim(\sim fx . gx . hx)\} . (x)\sim(fx . gx . hx) . (x)\sim(fx . \sim gx . hx)] \qquad C$$

El condicional final es

$\sim\{\sim[(x)\sim(fx . gx . hx) . (x)\sim(fx . gx . \sim hx)$
$. (x)\sim(fx . \sim gx . hx) . (x)\sim(fx . \sim gx . \sim hx)$
$. (x)\sim(\sim fx . gx . hx) . (x)\sim(\sim fx . gx . \sim hx)$
$. (x)\sim(\sim fx . \sim gx . hx) . (x)\sim(\sim fx . \sim gx . \sim hx)]$
$. \sim\sim[\sim\{(x)\sim(fx . gx . hx) . (x)\sim(fx . gx . \sim hx)\}.$
$. \sim\{(x)\sim(fx . gx . hx) . (x)\sim(\sim fx . gx . hx)\}$
$. (x)\sim(fx . gx . hx) . (x)\sim(fx . \sim gx . hx)]\}.$

Reemplazando en el condicional los cuantificativos por letras proposicionales:

$\sim\{\sim[p . q . r . s . t . u . w . x] . \sim\sim[\sim(p . q) . \sim(p . t) . p . r]\}$

Como esta truth-function no es tautológica, A no c-implica a C y S, por tanto, no es válido.

IV) $(x)(fx \supset gx) . (x)(gx \supset hx) . (\exists x)fx . \supset . (\exists x)(fx . hx)$ S
$\sim[(x)\sim(fx . \sim gx) . (x)\sim(gx . \sim hx) . \sim(x)\sim fx . (x)\sim(fx . hx)]$ S_1

Reduciendo a sus formas normales los cuatro cuantificativos que exhibe S_1:

a) $\sim(fx . \sim gx) . \sim(hx . \sim hx)$
$(x)\sim(fx . \sim gx . hx) . (x)\sim(fx . \sim gx . \sim hx)$

b) $\sim(gx . \sim hx) . \sim(fx . \sim fx)$
$(x)\sim(fx . gx . \sim hx) . (x)\sim(\sim fx . gx . \sim hx)$

c) $\sim fx . \sim(gx . \sim gx) . \sim(hx . \sim hx)$
$\sim[(x)\sim(fx . gx . hx) . (x)\sim(fx . gx . \sim hx)$
$. (x)\sim(fx . \sim gx . hx) . (x)\sim(fx . \sim gx . \sim hx)]$

d) $\sim(fx . hx) . \sim(gx . \sim gx)$
$(x)\sim(fx . gx . hx) . (x)\sim(fx . \sim gx . hx)$

La forma normal de S, alterando por comodidad el orden de los componentes, es

$$\sim[(x)\sim(fx.\sim gx.hx).(x)\sim(fx.\sim gx.\sim hx)$$
$$.(x)\sim(fx.gx.\sim hx).(x)\sim(\sim fx.gx.\sim hx)$$
$$.(x)\sim(fx.gx.hx).(x)\sim(fx.\sim gx.hx)$$
$$.\sim\{(x)\sim(fx.gx.hx).(x)\sim(fx.gx.\sim hx)$$
$$.(x)\sim(fx.\sim gx.hx).(x)\sim(fx.\sim gx.\sim hx)\}].C$$

C es c-válido, como lo prueba la siguiente truth-function tautológica:

$$\sim[p.q.r.s.t.\sim(t.r.p.q)]$$

A c-implica entonces a C y S es válido (*). No ha habido necesidad de construir, por superfluo, el condicional '$\sim(A.\sim C)$'.

5. Puede suceder que un cuantificativo de la forma '$(x)\sim\emptyset x$', donde '$\sim\emptyset x$' es un operando c-válido, forme parte de un esquema monádico. No hay manera alguna, en este caso, de hallar la forma canónica de dicho operando mediante la técnica prescrita por el autor, puesto que una truth-function tautológica carece de arreglos falsos. Por dicho motivo Quine recurre a un ardid (Cf. Sentido, p. 27/28) (**).

Como la forma canónica que se trata de obtener ha de ser composicionalmente equivalente al operando '$\sim\emptyset x$', es decir, tiene que ser también c-válida, es posible construirla uniendo mediante la conjunción las fórmulas elementales fx, gx, hx,..... requeridas, más otra que será la negación de una cualquiera de aquellas y negando luego dicha conjunción. Ejemplos: la forma "canónica" de $(fx.gx.\supset.fx)$ será $\sim(fx.\sim fx.gx\ ....)$, y la de $(fx\equiv fx)$, $\sim(fx.\sim fx.gx\ ......)$.

(*) Se trata, como es sabido, del esquema de un modo Bamalip con premisa existencial.
(**) Adviértase que este ardid produce una forma que en rigor no es canónica, de modo que, estrictamente hablando, los cuantificativos cuyos operandos sean c-válidos jamás podrán reducirse a cuantificativos típicos.

El caso presentado no merecería mayor relieve si no fuera por la peculiar situación que se produce cuando se trata de decidir si un esquema monádico de esta especie es o no válido. Supóngase que el esquema sea

$$(x)(fx \,.\, gx \;.\supset.\; fx). \qquad S$$

La aplicación rutinaria del procedimiento conducirá al condicional

$$\sim \{\sim [(x)\sim(fx\,.\,gx)\,.\,(x)\sim(fx\,.\sim gx)\,.\,(x)\sim(\sim fx\,.\,gx)\,.\,(x)\sim(\sim fx\,.\sim gx)]\,.\sim(x)\sim(fx\,.\sim fx\,.\,gx)\},$$

que en manera alguna es composicionalmente válido, como debería serlo, ya que la validez de S no admite duda. Lo mismo acontecerá con todo esquema monádico compuesto exclusivamente de un cuantificativo de la especie indicada: a pesar de ser válido no siempre resultará serlo al aplicársele el procedimiento QS, tomado a la letra.

En el caso de esquemas monádicos que cuenten entre sus componentes con una cuantificación cuyo operando sea c-válido, la situación es la misma. Examínese un caso muy simple:

$$\sim [(x)\sim(fx\,.\sim gx)\,.\sim(x)\sim(fx\,.\sim fx)] \qquad (S)$$
$$\sim [(x)\sim(fx\,.\sim gx)\,.\sim(x)\sim(fx\,.\sim fx\,.\,gx)] \qquad C$$

El condicional

$$\sim [\sim \{(x)\sim(fx\,.\,gx)\,.\,(x)\sim(fx\,.\sim gx)\,.\,(x)\sim(\sim fx\,.\,gx)\,.\,(x)\sim(\sim fx\,.\sim gx)\}\,.\sim\{(x)\sim(fx\,.\sim gx)\,.\sim(x)\sim(fx\,.\sim fx\,.\,gx)\}]$$

no es c-válido y por lo tanto S no será cuantificacionalmente válido de acuerdo al procedimiento QS. Pero su validez es obvia y cualquier otro procedimiento lo demuestra perfectamente.

Puede pues afirmarse que, tal como aparece descrito en

Sentido, QS no puede garantizar la corrección de todos los resultados que se obtienen mediante su aplicación.

6. ¿A qué se debe esta anomalía? No es necesaria mayor averiguación: la presencia en C de un cuantificativo irregular, atípico o anormal, que no aparece ni puede aparecer en A, trastorna el juego de la idea de c-implicación en que reposa el mecanismo de QS.

De acuerdo a éste, en efecto, un esquema monádico S con n letras predicativas monádicas es válido si y sólo si está c-implicado, una vez substituído por otro esquema equivalente cuyos cuantificativos son típicos, por otro esquema A, compuesto por los 2^n diversos cuantificativos típicos que es posible formar con n letras predicativas. Por eso es imprescindible, si se acepta sin más la estricta noción "truth-functional" de c-validez, que C se halle compuesto exclusivamente por cuantificativos de los que aparecen en A, pues de otro modo resultaría imposible una evaluación tabular normal de '∼(A . ∼C)', que es justamente lo que sucede en los ejemplos propuestos (*).

Si bien ningún pasaje de Sentido indica el medio de remediar esta situación (ni tampoco da pie para sospecharla), es fácil apreciar que una solución práctica consiste en la asignación, al evaluar tabularmente '∼(A . ∼C)', del valor V y sólo de V a todos los cuantificativos que una vez puestos en forma normal sean del tipo '(x)∼(fx . ∼ fx.....)', puesto que por su

(*) Obsérvese que, por las mismas razones expuestas, cuando en una fórmula monádica aparecen fórmulas elementales con constantes individuales, el procedimiento QS tampoco es capaz de evitar resultados incorrectos, como puede comprobarse fácilmente al someterle '∼[(x)fx.∼fa]'. Cierto es que no se trata aquí de esquemas monádicos tal como han sido definidos por Quine, pero las fórmulas con constantes individuales son de uso frecuente, de manera que la deficiencia de QS a este respecto no puede ser pasada por alto.

naturaleza jamás pueden ser falsos (*)(**). Así, si se trata de decidir acerca de la validez de '(x)(fx.gx. ⊃ .fx)',la tabla del condicional para la decisión será

$\sim\{\sim[(x)\sim(fx.gx).(x)\sim(fx.\sim gx).(x)\sim(\sim fx.gx)$
$.(x)\sim(\sim fx.\sim gx)].\sim(x)\sim(fx.\sim fx.gx)\}$

V	V	V	V	V
V	V	V	F	V
V	V	F	V	V
V	V	F	F	V
V	F	V	V	V
V	F	V	F	V
V	F	F	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	V	V	F	V
F	V	F	V	V
F	V	F	F	V
F	F	V	V	V
F	F	V	F	V
F	F	F	V	V
F	F	F	F	V

(*) Con este criterio de asignación es evidente que se agrega un elemento no "truth-functional" a la noción de c-validez.
(**) La idea en que se basa esta solución puede ser también ventajosamente adaptada para abreviar las operaciones cuando el operando de un cuantificativo es c-inconsistente. En efecto: si sólo se asigna el valor F a un cuantificativo S de esa especie cuando se evalúa el condicional '$\sim(A.\sim C)$', se obtendrá finalmente un resultado correcto y se habrá evitado la substitución de S por su forma normal, nada menos que la conjunción de 2^n (n = número de letras predicativas que exhibe el esquema) cuantificativos típicos, y el riesgo inminente de una fatigosa tabla. Sobre una posterior abreviación, véase lo que sigue.

Como todos los arreglos son verdaderos puesto que en ellos la negación del cuantificativo atípico es F, lo que acarrea la falsedad de la conjunción negada en último término, el esquema es ahora válido y las cosas vuelven a su sitio.

Otra solución, que rebasa deliberadamente los linderos de QS, es la de utilizar cuatro reglas que forman parte de la técnica resolutiva expuesta por Quine seis años más tarde, recurso que tiene la ventaja adicional de aligerar el empleo de QS cuando el esquema básico exhibe cuantificativos con operandos c-válidos o c-inconsistentes. En estos casos se substituirán por '$\top$' o '$\bot$', respectivamente, todos los cuantificativos de dichos tipos y se procederá luego a simplificar el esquema resultante mediante la aplicación ordenada de las reglas ' '$p.\top$' eq 'p' ', ' '$p.\bot$' eq '$\bot$' ', ' '$\sim\top$' eq '$\bot$' ' y ' '$\sim\bot$' eq '$\top$' ', donde 'p' representa un esquema cualquiera.

Se habrá de alcanzar necesariamente uno de tres resultados: a) S se reduce a '$\top$' (S es válido); b) S se reduce a '$\bot$' (S no es válido); o c) S se reduce a otro esquema equivalente S' en el que no aparecen ni '$\top$' ni '$\bot$' (S es válido si y sólo si S' lo es). En los dos primeros casos se ha conseguido una decisión y el problema está resuelto. En el tercero y último falta aún aplicar QS a S', lo que no ofrece ya dificultad alguna, pues todos los cuantificadores de S' son ahora típicos. La solución de algunos casos basta para ilustrar el uso de estas reglas, potestativo por lo demás, y, como se dijo, extraño al procedimiento QS original.

I) $(x)(fx . gx . \supset . fx)$ S

$(x) \sim (fx . \sim fx . gx)$

$\top$

S es válido.

II) $\sim[(x) \sim (fx . \sim gx) . \sim (x) \sim (fx . \sim fx)]$ S

$\sim[(x) \sim (fx . \sim gx) . \sim (x) \sim (fx . \sim fx . gx)]$

$\sim [(x) \sim (fx \,.\, \sim gx) \,.\, \sim \top]$
$\sim [(x) \sim (fx \,.\, \sim gx) \,.\, \bot]$
$\sim \bot$
$\top$

S es válido.

III) $(x)fx \supset gx) \,.\, \sim (x)(gx \,.\, hx \,.\supset.\, lx : \equiv : lx \vee \sim gx \vee \sim hx)$ S
$(x)\sim(fx.\sim gx).\sim(x)\sim(fx.\sim fx.gx)$
$(x)\sim(fx.\sim gx).\sim \top$
$(x)\sim(fx.\sim gx) \,.\, \bot$
$\bot$

S no es válido.

IV) $\sim [(x) \sim (fx \,.\, \sim gx) \,.\, (x)(fx \supset fx)]$ S
$\sim [(x) \sim (fx \,.\, \sim gx) \,.\, (x) \sim (fx \,.\, \sim fx \,.\, gx)]$
$\sim [(x) \sim (fx \,.\, \sim gx) \,.\, \top]$
$\sim (x) \sim (fx \,.\, \sim gx)$ S'

Como S' ya está en forma normal no queda otra cosa que formar el condicional para la decisión:

$\sim \{ \sim [(x)\sim(fx.gx).(x)\sim(fx.\sim gx).(x)\sim(\sim fx.gx)$
$.(x)\sim(\sim fx.\sim gx)].(x)\sim(fx.\sim gx)\}$

C no está c-implicado por A. Luego S', lo mismo que S, no es válido.

V) $\sim(\exists x)(fx. \supset .fx \vee gx). \supset .\sim(x)\sim(fx \vee hx \vee jx)$ S
$(x)(fx.\sim fx.\sim gx). \supset .\sim(x)(\sim fx.\sim hx.\sim jx)$
$\sim[(x)(fx.\sim fx.\sim gx).(x)(\sim fx.\sim hx.\sim jx)]$ (*)
$\sim [\bot \,.\, (x)(\sim fx.\sim hx.\sim jx)]$
$\sim \bot$
$\top$

S es válido.

(*) Repárese en que la forma normal del cuantificativo con operando c-inconsistente tiene 16 cuantificativos típicos y la del restante tiene a su vez catorce.

7. Existen esquemas que, no cumpliendo debidamente con los requisitos estipulados, pueden no obstante ser transformados en esquemas monádicos equivalentes, lográndose así que QS les sea aplicable indirectamente (*). En efecto: si S es un esquema no monádico y S' un esquema monádico equivalente a S, S será válido si y sólo si S' lo es, cosa que sí puede determinarse con el auxilio de QS.

Los detalles de las transformaciones requeridas según los casos, que constituyen en conjunto lo que bien podría denominarse "técnica de reducción a esquemas monádicos", así como algunos problemas que suscitan, son los siguientes (**):

a) Cuando un esquema S exhibe otra variable individual además de 'x', y siempre que cumpla con los demás requisitos, S puede ser transformado mediante la operación signada por Quine con la cifra VI (+). Esta operación, intitulada "variación alfabética de un pronombre" (loc. cit.), supone la existencia de dos matrices en sentido estricto, que sólo difieren "en que la primera exhibe un cierto pronombre libre" (loc. cit.), como es el caso de 'fx' y 'fy'. Afirma Quine que "si aplicamos a las respectivas matrices los cuantificadores que contienen los pronombres libres en cuestión, el resultado de la substitución

---

(*) Quine se limita a escribir: ".. y diversos esquemas no monádicos..... pueden convertirse en monádicos por medio de V y VI" (Sentido, p. 94). Es posible afirmar, sin embargo, que cualquier esquema no monádico - y no sólo sólo diversos esquemas - puede ser convertido en monádico mediante una aplicación exacta de las instrucciones que se darán luego. La idea directriz es la de ir "limpiando" los operandos de dentro a fuera mediante la operación (V) y, tan pronto como ésta no sea aplicable, debe hallarse la forma canónica correspondiente y distribuirse luego el cuantificador, con lo que desaparece el obstáculo y puede proseguirse sin más hasta concluir, empleándose (V) al final.

(**) La exposición de esta técnica se hace en tres incisos, correspondiendo cada uno de ellos al respectivo requisito cuya omisión se trata de remediar.

(+) Sentido, p. 83.

de uno de estos cuantificativos por otros (*), dentro de cualquier matriz válida, será válido" (loc. cit.). Por ejemplo: como '$\sim$((x)fx.$\sim$fz)' es válido (ibid., p. 68), si se substituye en ella '(x)fx' por '(y)fy', el esquema resultante '$\sim$((y)fy.$\sim$fz)' también es válido (loc. cit.).

No es cosa de aceptar sin reservas la regla de la variancia alfabética si de lo que se trata es de reducir un esquema S para hacer factible la aplicación de QS. Como dicha regla, en efecto, es aplicable sólo cuando S es válido, y S por hipótesis no es monádico, QS no podrá emplearse y habrá que recurrir forzosamente a un procedimiento que no sea QS para saber si S es válido, (VI) procedente y QS aplicable, pero en ese caso ni QS ni su aplicación son ya necesarios, pues ya se ha decidido acerca de la validez de S.

La dificultad puede ser salvada únicamente si se enuncia la regla de variancia alfabética sin tener en cuenta la validez o invalidez de los esquemas concernidos, tal como hace el propio Quine en otras obras suyas, posteriores a Sentido (**). Conviene entonces prescindir de la operación (VI) y poner en lugar suyo lo que convendría llamar "regla de variancia alfabética en sentido lato", según la cual, si un esquema no es monádico puede enmendarse el incumplimiento de la estipulación (a) substituyendo por 'x' todas las ocurrencias de otras variables individuales en dicho esquema, siempre que los otros dos requisitos se cumplan o hayan sido satisfechos previamente.

b) Puede también un esquema S no ser monádico por ostentar variables o pronombres libres. Pero si se atiende a lo que dice Quine (ibid., p. 61), pronombre libre es aquél al que "fal

---

(*) Así reza la traducción castellana, pero no hay duda que lo correcto es "por el otro".
(**) Véanse Mathematical Logic, § 21, y Logic, p. 6.

ta un cuantificador", y en consecuencia bastará escribir a la izquierda de S el ó los cuantificadores universales que se requieran para que sea cumplido de inmediato el segundo requisito. Con este proceder se obtendrá, bien un esquema monádico, bien un esquema que no lo sea por transgresión de alguno de los otros dos. Esta segunda alternativa obligará a continuar de acuerdo a lo que prescribe el respectivo inciso de esta sección, obteniéndose así un esquema monádico equivalente a S.

c) La operación signada con (V) (ibid., p. 8.) permite intercambiar esquemas de las formas '$\sim(p \cdot \sim(x)fx)$' y '$(x)\sim(p \cdot \sim fx)$', donde las letras esquemáticas "representan matrices que no contienen 'x' como pronombre libre" (ibid., p. 94), y obviar, de esa manera, el incumplimiento del tercer requisito (*). Resulta así posible transformar, por ejemplo, '$(x)\sim[(x)\sim(fx \cdot \sim gx) \cdot \sim(fx \cdot hx)]$', que no es un esquema monádico, en '$\sim[(x)\sim(fx \cdot \sim gx) \cdot \sim(x)(fx \cdot hx)]$', que sí lo es. Debe tenerse muy presente que no siempre puede aplicarse esta operación a un esquema en su forma original. Tratándose de '$(x)(fx \cdot p)$', por mencionar un caso de lo más simple, es indispensable obtener de antemano su forma normal.

8. No es mayormente explícito Quine cuando se trata de la aplicación de QS a esquemas no monádicos, pero un examen atento de sus preceptos permite hallar siempre el camino correcto, si bien harto tortuoso, hacia la solución buscada. Los siguientes ejemplos pueden ser muy provechosos para adquirir familiaridad con esta ampliación de QS.

(*) Consideradas como letras o variables proposicionales, 'p', 'q', 'r', etc. pueden aparecer dentro de un operando sin afectar la legitimidad de un esquema monádico (véase 2 supra), pero ello no excluye la necesidad de extraerlas mediante la operación (V) para evitar la ulterior aparición en '$\sim(A \cdot \sim C)$' de nocivos cuantificativos atípicos que no pueden extirpar las reglas agregadas a QS (véase sección 6, supra).

I) $(x)(fx.fy)$ S

S tiene más de una variable y una de ellas es libre. Como no es posible aún expulsar 'fy', debe hallarse primero la forma normal (*) de S, que es

$$(x)\sim(fx.\sim fy).(x)\sim(\sim fx.fy).(x)\sim(\sim fx.\sim fy) . \qquad S_1$$

Aplicando (V) para expulsar 'fy' y '$\sim$fy' de los cuantificativos de S_1:

$$\sim(\sim fy.\sim(x)\sim fx).\sim(fy.\sim(x)fx).\sim(\sim fy.\sim(x)fx) \qquad S_2$$

De esta manera se ha subsanado una de las dos infracciones de S. Falta ahora ligar 'y', cuantificando universalmente para ello S_2 respecto a 'y'. Luego, distribuyendo el cuantificador, se obtiene

$$(y)\sim(\sim fy.\sim(x)\sim fx).(y)\sim(fy.\sim(x)fx).(y)\sim(\sim fy.\sim(x)fx) . \qquad S_3$$

Pero como ahora S_3 viola el requisito (c), deben expulsarse los cuantificativos que se hallan dentro del alcance de '(y)' mediante la aplicación de (V). Se tiene entonces

$$\sim[\sim(x)\sim fx.\sim(y)fy].\sim[\sim(x)fx.\sim(y)\sim fy].\sim[\sim(x)fx.\sim(y)fy] . \qquad S_4$$

Basta ahora unificar la variable respecto a 'x', pues S_4 sólo incumple el primer requisito, y simplificar hasta donde se pueda. La forma normal de S es

$$\sim[\sim(x)\sim fx.\sim(x)fx].(x)fx \qquad C$$

y el condicional para la decisión

$$\sim\Big[\sim[(x)fx.(x)\sim fx].\sim\{\sim[\sim(x)\sim fx.\sim(x)fx].(x)fx\}\Big].$$

Como este esquema no es c-válido, S no es l-verdadero.

(*) En toda esta sección "forma normal", como se ve inmediatamente, tiene un alcance más amplio que el convenido.

II) $(x)\sim[fx.\sim(y)\sim(fy.\sim gy)]$ S

Exportando el cuantificativo '$\sim(y)\sim(fy.\sim gy)$' y unificando la variable:

$$\sim[\sim(x)\sim(fx.\sim gx).\sim(x)\sim fx] \qquad S_1$$

Reduciendo '$\sim(x)\sim fx$' a su forma normal:

$$\sim[(x)\sim(fx.gx).(x)\sim(fx.\sim gx]$$

De manera que la forma normal de S_1 resulta ser

$$\sim[\sim(x)\sim(fx.\sim gx).\sim\{(x)\sim(fx.gx).(x)\sim(fx.\sim gx)\}] \qquad C$$

y el condicional para la decisión

$$\sim\{\sim[(x)\sim(fx.gx).(x)\sim(fx.\sim gx).(x)\sim(\sim fx.gx).(x)\sim(\sim fx.\sim gx)$$
$$.\sim(x)\sim(fx.\sim gx).\sim[(x)\sim(fx.gx):(\sim(fx.\sim gx)]]\} .$$

A no c-implica a C y por tanto S no es válido.

III) $(x)[fx.\sim(y)\sim(fy.\sim gy)]$ S

Este ejemplo es "casi" el mismo que el anterior. Sin embargo, la "insignificante" diferencia origina una secuela muy distinta de operaciones. En efecto: el operando de (x) no está negado, de modo que es imposible aplicar la o peración (V) antes de obtener la forma normal de S. Esta se obtiene de la manera corriente, si bien conviene, para mayor comodidad, utilizar 'p' provisionalmente en vez de '$\sim(y)\sim(fy.\sim gy)$'. Así se obtienen, sucesivamente,

$$(x)[\sim(fx.p).\sim(\sim fx.p).\sim(\sim fx.\sim p)]$$
$$(x)\sim(fx.p).(x)\sim(\sim fx.p).(x)\sim(\sim fx.\sim p)$$
$$(x)\sim(p.fx).(x)\sim(p.\sim fx).(x)\sim(\sim p.\sim fx)$$
$$\sim[p.\sim(x)\sim fx].\sim[p.\sim(x)fx].\sim[\sim p.\sim(x)fx]$$

$$\sim[(x)\sim(fx.\sim gx).\sim(x)\sim fx].\sim[(x)\sim(fx.\sim gx).\sim(x)fx]$$
$$.\sim[\sim(x)\sim(fx.\sim gx).\sim(x)fx] \ .$$

Reduciendo '$\sim(x)\sim fx$' a su forma normal:

$$\sim[(x)\sim(\sim fx.gx).(x)\sim(\sim fx.\sim gx)]$$

De esta manera se puede ya obtener la forma normal de S, o sea

$$\sim[(x)\sim(fx.\sim gx).\sim\{(x)\sim(\sim fx.gx).(x)\sim(\sim fx.\sim gx)\}]$$
$$.\sim[(x)\sim(fx.\sim gx).\sim\{(x)\sim(fx.\sim gx).(x)\sim(\sim fx.gx).(x)\sim(\sim fx.\sim gx)\}]$$
$$.\sim[\sim(x)\sim(fx.\sim gx).\sim\{(x)\sim(fx.\sim gx).(x)\sim(\sim fx.gx).(x)\sim(\sim fx.\sim gx)\}],$$

A es, en este caso,

$$\sim[(x)\sim(fx.gx).(x)\sim(fx.\sim gx).(x)\sim(\sim fx.gx).(x)\sim(\sim fx.\sim gx)] \ .$$

Si apelamos a letras proposicionales, el condicional para la decisión será el siguiente:

$$\sim\{\sim(p.q.r.s).\sim[\sim\{q.\sim(r.s)\}].\sim[q.\sim(q.r.s)].\sim[\sim q.\sim(q.r.s)]\}$$

Como este condicional no es tautológico, S no es válido(*).

IV) $$(x)[fx.p. \supset .\sim(y)\sim fy] \qquad S$$

Reemplazando provisionalmente '$\sim(y)\sim fy$' por 'q' :

$$(x)(fx.p. \supset .q) \ (**). \qquad S_1$$

S_1 equivale a

$$(x)\sim(fx.p.\sim q).$$

Expulsando 'p' y 'q' mediante la operación (V):

(*) El lector puede resolver por su cuenta '$(x)[\sim fx.\sim(y)\sim(fy.\sim gx)]$' (y sepa de antemano que no es válido).
(**) No existe problema alguno cuando en un esquema aparecen dos o más componentes que deben ser expulsados, siendo perfectamente intercambiables los esquemas '$(x)\sim(p.q.r. \ ..... \ \sim\emptyset x)$' y '$\sim(p.q.r. \ .... \ .\sim(x)\emptyset x)$'.

$\sim[p.\sim q.\sim(x)fx]$

Substituyendo 'q' por '$\sim(y)\sim fy$' y unificando la variable:

$\sim[p.(x)\sim fx.\sim(x)fx]$ C

El condicional para la decisión es

$\sim\{\sim[(x)\sim fx.(x)fx].\sim\sim[p.(x)\sim fx.\sim(x)\sim fx]\}$,

cuya c-validez se aprecia mejor recurriendo a letras proposicionales y escribiendo la siguiente truth-function:

$\sim[\sim(q.r).p.q.\sim q]$

De manera que A c-implica a C y S es válido.

V) $(x)(fx.p). \supset .(\exists x)(gx. \supset .fx.p)$ (*) S

En notación de Sentido:

$\sim[(x)(fx.p).(x)(gx.\sim(fx.p))]$

La forma"normal"de '$(x)(fx.p)$' es

$(x)\sim(fx.gx.\sim p).(x)\sim(fx.\sim gx.\sim p).(x)\sim(\sim fx.gx.p)$
$.(x)\sim(\sim fx.\sim gx.p).(x)\sim(\sim fx.gx.\sim p).(x)\sim(\sim fx.\sim gx.\sim p).$

Aplicando (V) a dicha forma normal:

$\sim[\sim p.\sim(x)\sim(fx.gx)].\sim[\sim p.\sim(x)\sim(fx.\sim gx)].\sim[p.\sim(x)\sim(\sim fx.gx)]$,
$.\sim[p.\sim(x)\sim(\sim fx.\sim gx)].\sim[\sim p.\sim(x)\sim(\sim fx.gx)].\sim[\sim p.\sim(x)\sim(\sim fx.\sim gx)]$

La forma normal de '$(x)[gx.\sim(fx.p)]$' resulta ser

$(x)\sim(fx.gx.p).(x)\sim(fx.\sim gx.p).(x)\sim(fx.\sim gx.\sim p).$
$.(x)\sim(\sim fx.\sim gx.p).(x)\sim(\sim fx.\sim gx.\sim p).$

(*) De Quine, Métodos, p. 265, apenas modificado.

Aplicando (V) a este esquema:

$$\sim[p.\sim(x)\sim(fx.gx)].\sim[p.\sim(x)\sim(fx.\sim gx)].\sim[\sim p.(x)\sim(fx.\sim gx)]$$
$$.\sim[p.\sim(x)\sim(\sim fx.\sim gx)].\sim[\sim p.\sim(x)\sim(\sim fx.\sim gx)]$$

La forma normal de S es entonces

$$\sim\{\sim[\sim p.\sim(x)\sim(fx.gx)].\sim[p.\sim(x)\sim(fx.\sim gx)].\sim[p.\sim(x)\sim(\sim fx.gx)].$$
$$.\sim[p.\sim(x)\sim(\sim fx.\sim gx)].\sim[\sim p.\sim(X)\sim(\sim fx.gx)].\sim[\sim p.\sim(x)\sim(\sim fx.\sim gx)].$$
$$.\sim[p.\sim(x)\sim(fx.gx)].\sim[p.\sim(x)\sim(fx.\sim gx)].\sim[\sim p.(x)\sim(fx.\sim gx)].$$
$$.\sim[p.\sim(x)\sim(\sim fx.\sim gx)].\sim[\sim p.\sim(x)\sim(\sim fx.\sim gx)]\} \qquad . \qquad C$$

A, que en este caso es

$$\sim[(x)\sim(fx.gx).(x)\sim(fx.\sim gx).(x)\sim(\sim fx.gx).(x)\sim(\sim fx.\sim gx)] \ ,$$

c-implica a C, como tal vez se anime a comprobar el lector. S, por ello, es válido.

9. No es posible dar término a este capítulo sin dedicar unas palabras a la razón de ser del condicional '$\sim(A.\sim C)$', cuyo carácter es el que decide finalmente acerca de la validez de un esquema cuya forma normal es C.

A primera vista puede tenerse la impresión de que se trata de un añadido superfluo y que puede, por tanto, ser eliminado sin perjuicio alguno para la eficacia de QS, es decir, que el proceso puede terminar considerando a la forma normal C como una truth-function de cuantificativos típicos, cuya evaluación ha de permitir alcanzar la decisión sin tener por qué continuar con la del mencionado condicional. No sobra, sin embargo, tal fase de QS: si el esquema '$\sim[(x)fx.(x)\sim fx]$', por ejemplo, es sometido a QS, acortado de la manera antedicha, esto es, sin tomar en cuenta el condicional '$\sim(A.\sim C)$', se verá que no resulta válido, situación imposible de aceptar pues es en verdad imposible que, como enuncia el esquema, todos los objetos del Universo disfruten al mismo tiempo de las propiedades contradictorias f y -f, pero en cambio su validez resulta corroborada si se le somete a QS, comprendiendo la prueba del condicional. En lo que sigue se va a tratar de elucidar este punto y otros concomitantes.

Recuérdese, para empezar, que la corrección de los resultados de QS se halla garantizada a condición de que el universo no sea vacío (*). Pues bien: simbólica y operativamente dicha estipulación funciona en QS al figurar como el antecedente A del condicional para la decisión, y esto se muestra claramente cuando, al substituir sus U-cuantificadores por E-cuantificadores, A viene a ser

$$(\exists x)(\alpha_1 x.\alpha_2 x.\ldots.\alpha_n x) \vee (\exists x)(\alpha_1 x.\alpha_2 x.\ldots.{\sim}\alpha_n x) \vee \ldots$$
$$\ldots \vee (\exists x)({\sim}\alpha_1 x.{\sim}\alpha_2 x.\ldots.{\sim}\alpha_n x),$$

esto es, un enunciado que afirma que existe por lo menos un objeto que disfruta de las propiedades $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, o que existe por lo menos un objeto que disfruta de las propiedades $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, {\sim}\alpha_n$, y así sucesivamente, es decir, que existe por lo menos un individuo que disfruta de alguna de las posibles combinaciones de la totalidad de propiedades dadas en cierto universo y que éste, por tanto, no es vacío.

El esquema '$\sim[(x)fx.(x){\sim}fx]$' equivale, intercambiando sus cuantificadores, a '$\sim[\sim(\exists x){\sim}fx.\sim(\exists x)fx]$', cuya tabla es

$\sim[\sim(\exists x){\sim}fx.\sim(\exists x)fx]$					
V	F	V	F	F	V
V	F	V	F	V	F
V	V	F	F	F	V
F	V	F	V	V	F

(*) Véase la sección 3, supra.

Se aprecia cómo la línea que perjudica la validez es precisamente aquélla en que se consideran falsos '$(\exists x)fx$' y '$(\exists x){\sim}fx$', lo que significa que, cuando no existe un objeto que disfrute de f ni de -f, esto es, cuando el universo del discurso para '${\sim}[{\sim}(\exists x){\sim}fx.{\sim}(\exists x)fx]$' sea vacío, el esquema no es válido. Pero si se admite la estipulación de un universo no vacío, la tabla es

$${\sim}[(\exists x){\sim}fx \vee (\exists x)fx.\{{\sim}(\exists x){\sim}fx.{\sim}(\exists x)fx\}]$$

V	V	V	V	F	F	F	F
V	V	V	F	F	F	F	V
V	F	V	V	F	V	F	F
V	F	F	F	F	V	V	V

y de acuerdo a ella es válido el esquema según el cual si el universo no es vacío, por existir en él por lo menos un objeto que disfruta de f o de -f, '${\sim}[{\sim}(\exists x){\sim}fx.{\sim}(\exists x)fx]$' y su equivalente '${\sim}[(x)fx.(x){\sim}fx]$' son válidos, pues sean los que fueren los valores asignados a sus cuantificativos típicos, nunca se dará el caso de que sean falsos. Ahora bien: como el antecedente es su condición suficiente, y se afirma de antemano, con el carácter de estipulación forzosa, que es verdadero, por modus ponens se llega a la validez de '${\sim}[(x)fx.(x){\sim}fx]$'.

La estipulación de un universo no vacío, motivo esencial de la última fase de QS, no es innecesaria, pues si se intenta alcanzar resultados similares a los conseguidos por la Lógica tradicional no es posible prescindir de ella (*). De manera que si se adopta el condicional, tal como sucede en Sentido, QS per

---

(*) No debe confundirse tal estipulación con la "condición existencial", también requerida para la validez de algunas inferencias de la Lógica tradicional, o sea la concesión de que ciertos términos o clases que aparecen en tales inferencias poseen por lo menos un elemento. Esta es una suposición más fuerte que la del universo no vacío, como lo ilustra el hecho de que los modos Darapti, Felapton, Fesapo y Bamalip, por ejemplo, admitida la existencia de elementos pertenecientes a sus términos medio y mayor, son válidos siempre, pero sin tal admisión no lo son, sea o no vacío el universo del discurso.

mite decidir acerca de la validez de un esquema monádico en un universo no vacío (que es la que toma en cuenta la Lógica tradicional), y de no hacerlo así, la decisión aportada por QS es correcta sólo tratándose de un universo cualquiera, vacío o no (*).

Existe sin embargo un medio más práctico que quitar o poner el antecedente antes de efectuar la tabla de valores cuando se desee determinar la validez de un esquema en un universo vacío o no. Afirma Church, a propósito del procedimiento decisorio de Von Wright, basado en la misma idea de QS, que una fórmula predicativa monádica de primer grado, puesta en una forma normal que se obtiene luego de distribuir los E-cuantificadores sobre un operando en forma normal disyuntiva, es válida "in all non-empty domains of individuals if and only if it has the value Truth for every such system of truth-values in which not all the 2^n E-constituents ("cuantificativos típicos") have the value falsehood" (**), es decir, que poner como condición que el universo no sea vacío da lo mismo que borrar de la respectiva tabla de su forma normal, obtenida según los preceptos de QS, la línea en que se asigna V a todos los cuantificativos típicos que forman parte de ella (+).

De modo que el empleo de QS puede ser apreciablemente facilitado si se modifica su última parte de la manera siguiente: a) obtenida la forma normal C, debe efectuarse su tabla para todos los valores que puedan asumir sus cuantificativos; b) S es válido en un universo no vacío si y sólo si, suprimida la prime-

---

(*) La condición existencial, en caso de requerirse, debe ser formulada explícitamente en el primer caso. En el segundo es imposible formular la condición existencial sin admitir al mismo tiempo la no vacuidad del universo.
(**) Review, p. 59.
(+) Si se recuerdan conocidas equivalencias entre U- y E-cuantificadores no deberá sorprender esta aparente alteración del pasaje citado de Church.

ra línea de la tabla, esto es, aquélla en que se asigna V a todos los cuantificativos, S es c-válido; c) S es válido en cualquier universo, vacío o no, si y sólo si, tomando en consideración todas las líneas de la tabla, S es c-válido (*).

Así, por ejemplo, en el caso del esquema tantas veces utilizado, la tabla es

$$\sim[(x)fx.(x)\sim fx]$$

F	V	V	V
V	V	F	F
V	F	F	V
V	F	F	F

Suprimir la primera línea es aceptar la estipulación del universo no vacío, lo que originalmente se realizaba mediante el agregado del antecedente A. S es entonces válido, por ser c-válido según la tabla reducida. No lo es, en cambio, si se toma en cuenta la tabla íntegra, es decir, cuando el universo es vacío.

10. A manera de resumen de las consideraciones hechas hasta aquí sobre el procedimiento QS puede afirmarse lo siguiente:

a) La presencia de cuantificativos con operandos c-válidos en un esquema básico cualquiera perturba el juego de las reglas de QS, cuyo autor, o no se ha percatado de ello, o intencionadamente ha dejado a sus lectores la tarea de descubrir y resolver por su cuenta la cuestión. Sea como fuere, debe tenerse muy presente lo dicho en la sección II.6, supra, si es que no se desea correr el riesgo de obtener, al usar QS, resultados incorrectos.

(*) El tratamiento de esquemas que exhiben cuantificaciones con operandos c-válidos o c-inconsistentes (véase sección 6, supra) no varía en caso de admitirse esta modificación de QS.

b) El procedimiento QS no permite una decisión cuando en el esquema aparecen constantes individuales. Si bien el propio Quine conviene en esto al no tener como monádico un esquema de esa especie y al no proporcionar técnica alguna de reducción, y nadie puede discutir su derecho a hacerlo así, tampoco puede discutirse la frecuencia y utilidad de dichos esquemas, sobre todo para el análisis de inferencias en las que aparecen proposiciones singulares. Un procedimiento que sea aplicable a ellos será sin duda superior a QS.

c) El procedimiento QS es arduo y fatigoso, aún tratándose de esquemas monádicos relativamente simples, y así lo ha reconocido su autor (*), pero puede sin embargo simplificarse considerablemente según las indicaciones hechas en las secciones 6 y 9. El caso de esquemas en forma normal prenex y de esquemas complejos en general requiere para su solución un esfuerzo evidentemente desproporcionado en relación a otros procedimientos conocidos.

d) Lo aseverado en los tres incisos anteriores acerca de QS no lo hacen recomendable. El propio Quine no vuelve a mencionarlo en sus obras, como no sea para poner de manifiesto sus desventajas prácticas, comparándolo con otros que concibió posteriormente.

(*) Métodos, p. 170, n.1.

C A P I T U L O   III

El Procedimiento QL

1. Un año después de publicado O Sentido, Quine introdujo un nuevo procedimiento decisorio, "reminiscencia de procedimientos desarrollados por Behmann (1922) y Parry (1932)" (*), descrito en el artículo "On the Logic of Quantification" (**). "The primary purpose of this paper ...... is to present a new decision procedure for monadic schemata which seems convenient enough for practical and pedagogical use" (+).

En la sección 5 de dicho artículo el autor justifica el procedimiento que presenta y que a partir de aquí se mencionará abreviadamente con las letras QL. Dicha justificación no será incluída en este trabajo, ni tampoco la extensión de QL a esquemas poliádicos, esto es, esquemas en los cuales las letras predicativas poseen dos o más argumentos, puesto que, ni aquélla concierne a su objetivo, ni dicha extensión constituye propiamente un procedimiento decisorio en sentido estricto(++). En efecto, el que "all the valid polyadic schemata can be derived from the monadically valid schemata" (*+) no significa otra cosa que la posibilidad de obtener por substitución, a partir de un esquema monádico válido, esquemas poliádicos también válidos. Esto no constituye sino "medio procedimiento decisorio" (+*), puesto que no proporciona "procedimientos generales

---

(*) Métodos, p. 170, n.1.
(**) JSL, 10 (1945), p. 1-12. Llama verdaderamente la atención que Anderson y Johnstone (Natural Deduction, p. 339) confundan este nuevo procedimiento con el QS ya estudiado en el capítulo anterior.
(+) Logic, p. 3/4.
(++) "It is known, furthermore, that <u>no</u> decision procedure is possible for the validity of polyadic schemata" (ibid., p. 4).
(*+) Loc. cit.
(+*) Métodos, p. 260.

para mostrar la no validez" (*) de los esquemas poliádicos que sean de tal condición.

El procedimiento QL se halla constituído esencialmente por una prueba de validez, aplicable únicamente a esquemas monádicos básicos cerrados (**). Es posible, sin embargo, extenderla a toda clase de esquemas monádicos, lo que se logra agregando a dicha prueba una técnica que permite transformar cualquier esquema monádico cerrado en otro equivalente, pero básico (+). QL se compone, por tanto, de una técnica de reducción a esquemas monádicos básicos cerrados, más una prueba de validez, descritas ambas en las secciones 3 y 4 de "On the Logic

---

(*) Loc. cit.

(**) Como en este artículo Quine cambia substancialmente la terminología empleada en Sentido, es conveniente hacer algunas indicaciones al respecto. Un esquema monádico se denomina "cerrado" si carece de variables libres y recibe el nombre de "cierre" ("closure") de otro esquema S que posee variables libres, siempre que se halle compuesto por este último, más cuantificadores universales 'x', 'y', etc., correspondientes a cada una de las variables libres que S exhibe. Un esquema que ostente por lo menos una variable libre está "abierto". Una cuantificación "básica", por otro lado, es un esquema cerrado que consiste en un cuantificador universal, seguido por una truth-function, cada uno de cuyos componentes es una letra predicativa seguida por la variable que aparece en el cuantificador. Se denomina, por último, "esquema básico", una truth-function en la que alguna o todas sus letras proposicionales se hallan substituídas por cuantificaciones básicas. Así, por ejemplo, son básicos los esquemas '$(x)fx \supset p.(\exists x)fx. \supset .p$' y '$(x)(fx \supset gx).(x)(gx \supset hx). \supset .(x)(fx \supset hx)$'. Pero '$(x)(fx \supset p).$ $.(\exists x)fx. \supset .p$' no lo es, puesto que '$(x)(fx \supset p)$', una de las cuantificaciones que aparece en lugar de una letra proposicional, no es básica.

(+) Como en el caso de QS (véase II.6 supra), un esquema monádico que exhiba una fórmula elemental compuesta de una letra predicativa seguida por una constante individual ni es básico, de acuerdo a "Logic", ni hay cómo transformarlo en básico con los medios que proporciona la técnica aludida en el texto. Por lo tanto, la determinación de su validez o de su invalidez no puede ser sometida a QL, so pena de incurrir en graves errores. El esquema '$(x)fx \supset fa$' ilustra tal situación, pues siendo obviamente válido resulta no serlo cuando se le somete a la prueba de validez de QL.

of Quantification". "The combined techniques of the two sections" - afirma el autor - "then enable us to test any monadic schema for validity, simply by transforming its closure into a basic equivalent and testing the latter for validity" (*).

Quine empieza explicando primero la técnica de reducción y en lo que sigue se hará lo mismo.

2. No existe forma de pasar de un esquema monádico cerrado no básico S a otro básico equivalente que no sea la de "depurar" sus cuantificaciones, expulsando de los respectivos operandos las fórmulas que no deben aparecer en ellos. Dichas fórmulas pueden ser: a) letras proposicionales como 'p', 'q', etc.; b) fórmulas elementales cuya variable no es la de cuantificación, como 'fy' en '(x)(fy ⊃ gx)'; o c) cuantificaciones básicas, con variables distintas a la de cuantificación, como '(∃y)gy' en '(x)[fx ⊃ (∃y)gy]' (**).

El método general de expulsión ("exportation") de las fórmulas enumeradas propuesto por Quine a manera de complemento de QL prescribe las siguientes operaciones, que se aplicarán, como es natural, únicamente cuando el caso lo requiera:

a) Toda ocurrencia de '(∃x)', '(∃y)', etc. debe ser substituída por '∼(x)∼', '∼(y)∼', etc., respectivamente, de manera tal que en S aparezcan sólo cuantificaciones universales, negadas o no.

b) Sea '(x)(...........)' una cuantificación de S que exhibe un componente 'p' no permitido en las cuantificaciones

---

(*) Logic, p. 4.
(**) No hay necesidad de incluir en esta lista componentes del tipo 'fa', desde que, como se indicó en la sección anterior, su presencia, <u>incluso fuera de los operandos</u>, impedirá siempre que S, según lo prescrito por QL, sea o pueda transformarse en básico.

básicas (*). Para expulsar dicho componente se empezará por encontrar, "by truth-function theory" (Logic, p. 4), las dos expresiones a que se reduce '(........)' para 'p'='T' y 'p'='F'. "An easy graphic way (**) is to put the appropiate truth-value letter, 'T' or 'F', for 'p' throughout '(........)' and then progressively reduce '∼ T ' to ' F ', '∼F ' to 'T', 'T.fx' to 'fx', ' F .fx' to ' F ', 'fx ⊃ F ' to 'fx', and so on" (loc.cit.), hasta lograr que 'T' y ' F ' desaparezcan de '(........)'.

Sean '(--------)' y '(°°°°°°°°)' las dos expresiones buscadas. La cuantificación original '(x)(........)' equivale a

p.(x)(--------).∨ .∼p.(x)(°°°°°°°°) (+). D

'D' es la forma general de la cuantificación básica, equivalente a la no básica, que se buscaba.

Sea, por ejemplo, la cuantificación no básica siguiente:

(x)(fx ⊃ p) (1)

Se trata de expulsar 'p' para depurar el operando y transformar (1) en una cuantificación básica. Aplicando a 'fx ⊃ T' y 'fx ⊃ F ' el método explicado, se obtiene, respectivamente, 'T' y '∼fx'. D es entonces, para este caso,

p.T.∨ .∼p.(x)∼fx . (2)

(*) Se usa, por razones de comodidad, la letra 'p', pero es obvio que puede tratarse de cualquier otro de los componentes "vetados", lo que en nada altera el procedimiento reductivo.
(**) Este "easy graphic way", salvo el hecho de usar ' F ' en vez de '⊥', es la misma técnica resolutiva que va a aparecer expuesta in extenso, sólo cinco años más tarde, en Methods of Logic (New York, 1950). Véase Métodos, § 5, donde figura la descripción pormenorizada de esta técnica.
(+) No siempre (--------) y/o (°°°°°°°°) son esquemas: unas veces resultarán 'T' y otras ' F '. En tales casos '(x)(T)' y/o '(x)(F)', como se infiere de los ejemplos del texto original, serán substituídas por 'T' y/o ' F ', respectivamente.

Pero 'p.T' equivale a 'p'. (2), por lo tanto, equivale a

$$p . \vee . \sim p . (x) \sim fx \ , \qquad (3)$$

que puede simplificarse aún más apelando a la distributividad de 'V'. Se obtiene así, primero,

$$p \vee \sim p . p \vee (x) \sim fx \ ,$$

y luego

$$p \vee (x) \sim fx \ ,$$

que es la cuantificación buscada.

c) La disyunción inicial D, como lo ilustra el ejemplo an̲terior, es susceptible de simplificación cuando las expresiones '(--------)' y/o '(°°°°°°°°)' resultan ser sencillamente 'V' o 'F'. Quine proporciona una lista de las formas generales simplificadas a las que se llega en estos casos, pero no es preciso siquiera conocerlas - como parecería exigir el texto del artículo - pues basta saber operar con truth-functions para alcanzar la respectiva forma simplificada. Los ejemplos que siguen son lo suficientemente esclarecedores al respecto y no requieren mayor explicación.

I) $$p . (x)(\text{--------}) . \vee . \sim p . \top \qquad D$$
$$p . (x)(\text{--------}) . \vee . \sim p$$
$$p \vee \sim p . \sim p \vee (x)(\text{--------})$$
$$\sim p \vee (x)(\text{--------})$$
$$p \supset (x)(\text{--------})$$

II) $$p . F . \vee . \sim p . (x)(°°°°°°°°) \qquad D$$
$$F . \vee . \sim p . (x)(°°°°°°°°)$$
$$\sim p . (x)(°°°°°°°°)$$

III) $$p . F \;.\vee .\sim p . T$$ D

$$F \;.\vee .\sim p$$

$$\sim p$$

IV) $$p . T . \vee .\sim p . T$$ D

$$p . \vee .\sim p$$

o $$p \supset p \quad (*)$$

V) $$p . F \;.\vee .\sim p . F$$ D

$$F \vee F$$

$$F \quad (*)$$

$$p . \sim p$$

d) "Now the method of transforming any closed monadic schema into a basic equivalent consists merely in continued use of the above exportation technique starting in the innermost quantifications of [S]." (Ibid., p. 5).

Como de costumbre, un ejemplo aclarará la idea. Sea el esquema no básico

$$(y)(x)(fx . fy . \supset .gx \vee p) \; . \qquad (1)$$

Debe empezarse expulsando 'fy' de la cuantificación '(x)(...)' que es la "más interna" (**).La expulsión de 'fy' se logra así:

$$fx . T . \supset . gx \vee p \qquad\qquad fx . F . \supset . gx \vee p$$

$$fx . \supset . gx \vee p \qquad\qquad F . \supset . gx \vee p$$

$$T$$

(*) Cuando un esquema S queda reducido a 'F' o a la tautología trivial '$(p \vee \sim p)$', la ulterior prueba de validez es indudablemente superflua, pues ha quedado establecido que S es c-inconsistente o c-válido, respectivamente. Pero nada se lee en Logic acerca de esto.

(**) Es indiferente empezar por 'fx' o 'p', si bien la secuela habrá de ser distinta según el punto de partida que se elija.

$$fy.(x)(fx. \supset .gx \vee p).\vee.\sim fy.\mathrm{T} \qquad \text{D}$$

$$fy.(x)(fx. \supset .gx \vee p).\vee.\sim fy$$

$$\sim fy \vee fy.\sim fy \vee (x)(fx. \supset .gx \vee p)$$

$$\sim fy \vee (x)(fx. \supset .gx \vee p)$$

$$fy \supset (x)(fx. \supset .gx \vee p)$$

(1) queda transformado en

$$(y)[fy. \supset .(x)(fx. \supset .gx \vee p)] \; . \qquad (2)$$

Substitúyase ahora '$(x)(fx. \supset .gx \vee p)$' por la variable auxiliar 'X', a fin de no embrollar innecesariamente las operaciones, y expúlsese 'X' de la cuantificación '(y)(........)' de acuerdo a las reglas conocidas.

$$(y)(fy. \supset .X)$$

$fy \supset \mathrm{T}$ $fy \supset \mathrm{F}$

T $\sim fy$

$$X.\mathrm{T}.\vee \sim X.(y)\sim fy \qquad \text{D}$$

$$X. \vee .\sim X.(y)\sim fy$$

$$X \vee \sim X.X \vee (y)\sim fy$$

$$X \vee (y)\sim fy$$

o sea:

$$(x)(fx. \supset .gx \vee p) \vee (y)\sim fy \qquad (3)$$

No resta ahora otra cosa que expulsar 'p' de '$(x)(fx. \supset .gx \vee p)$'.

$fx. \supset .gx \vee \mathrm{T}$ $fx. \supset .gx \vee \mathrm{F}$

$fx. \supset .\mathrm{T}$ $fx. \supset .gx$

T

$$p.\mathrm{T}. \vee .\sim p.(x)(fx \supset gx)$$

$$p. \vee .\sim p.(x)(fx \supset gx)$$

$$p \vee \sim p.p \vee (x)(fx \supset gx)$$

$$p \vee (x)(fx \supset gx) \qquad (4)$$

(1) queda así transformado en el esquema básico

$$p \vee (x)(fx \supset gx) \vee (y){\sim}fy \quad . \tag{5}$$

e) Debe advertirse que antes de someter el esquema básico resultante al procedimiento decisorio propiamente dicho, "all their variables are to be written uniformely as 'x'" (ibid., p. 6). (5) se escribirá entonces

$$p \vee (x)(fx \supset gx) \vee (x){\sim}fx. \tag{6}$$

"Such relettering will never engender conflict, since in a basic schema all occurrences of variables are bound to quantifiers with non-overlapping scopes". (Loc. cit.).

3. La segunda fase del procedimiento QL, esto es, la que permite establecer algorítmicamente la validez (o invalidez) de un esquema monádico cualquiera S, consiste fundamentalmente en la combinación de ciertas "familiar techniques of truth-function theory" (*). Estas técnicas deben aplicarse siguiendo un orden fijo, de acuerdo a las siguientes instrucciones:

1. Se construye una tabla de valores para S, considerando todas las combinaciones de valores **V** y **F** que pueden asignarse a las cuantificaciones básicas sin negar y a las letras proposicionales que exhibe S.

2. Si, luego de esto, S resulta ser c-válido (o "medádicamente válido", de acuerdo a este artículo), "the test is already at an end" (loc. cit.): S es válido.

3. Si S no es c-válido, bórrense o suprímanse las líneas o arreglos que arrojen V y determínese si cada una de las líneas o arreglos restantes se halla por lo menos en uno de estos tres casos:

a) Asigna 'F' a una cuantificación básica cuyo operando es c-válido.

(*) Logic, p. 6 .

b) Asigna 'V' a una cuantificación básica cuyo operando es c-inconsistente o a varias cuantificaciones básicas, la conjunción de cuyos operandos es c-inconsistente(*).

c) Asigna 'V' a una o más cuantificaciones básicas cuyo operando, o la conjunción de cuyos operandos, implica al operando de otra a la que se asigna 'F' (**).

S es inválido si y sólo si una de las líneas o arreglos que resultaron falsos no cumple por lo menos una de las condiciones (a)-(c). O, en otras palabras, S es válido si y sólo si todos los arreglos mencionados cumplen por lo menos una de esos tres requisitos (+).

4. Algunos pasajes de las instrucciones puntualizadas en la sección anterior no son lo suficientemente claros e inequívocos, y como pueden provocar, a juicio del autor de esta tesis, ciertas discrepancias acerca de la exacta manera de aplicar QL, a continuación se va a tratar de esclarecer su sentido correcto y de enmendarlos donde sea preciso, para evitar que una desprevenida interpretación suponga imprescindible la ejecución de una serie de operaciones o verificaciones que son en realidad superfluas.

(*) "It assigns '⊤' to one or more quantifications whose scope, or the conjunction of whose scopes, is medadically contravalid". (Loc. cit.)
(**) "The scope, or conjunction of scopes, of one or more quantifications assigned '⊤' medadically implies the scope of a quantification assigned '⊥'." (Loc. cit.).
(+) Las letras proposicionales que exhibe S no tienen otro papel que el de intervenir en la eliminación de arreglos. Los dos requisitos estipulados en 3a y 3b no rezan con ellas y en lo que concierne al cumplimiento de 3c es condición suficiente y necesaria el análisis de condicionales compuestos exclusivamente por operandos.

a) Quien trate de determinar si es o no válido el esquema

$$(x)\sim(fx \supset gx) \vee (x)(fx \vee \sim hx) . (x)\sim(gx . hx) \supset \sim(x)(fx \vee \sim hx) . \sim(x)\sim(fx \supset gx) . (x)\sim(gx . hx)$$

verá, una vez efectuada la tabla, que es c-inconsistente, es decir, que los ocho arreglos posibles son falsos. De acuerdo a la regla 3 de la prueba de validez de QL, como no es c-válido, podría creerse que es necesario proseguir aún, verificando si cada uno de los ocho cumple o no los requisitos estipulados por ella. Pero no hay razón para continuar, pues es fácil probar que cuando un esquema básico, una vez efectuada su evaluación tabular, es c-inconsistente, la prueba, como en el caso de los esquemas c-válidos, también "is already at an end", debiéndose afirmar, sin más, que dicho esquema no es ni puede ser cuantificacionalmente válido. Este agregado, que perfecciona QL (*) y al mismo tiempo simplifica, para tales casos, su operación, se demuestra de la manera siguiente:

Denomínense t-cuantificaciones a todas aquellas que por contar con un operando c-válido son también cuantificacionalmente válidas o, simplemente, válidas. Sea S un esquema básico c-inconsistente cualquiera. S, que es falso en todas sus arreglos, o exhibe t-cuantificaciones o no las exhibe.

a) S carece de t-cuantificaciones. Es imposible entonces que S pueda cumplir alguna de las tres condiciones es-

---

(*) Si, de otro modo, para efectos de la aplicación de QL, los esquemas c-inconsistentes son asimilados a los c-consistentes, como de modo tácito admite el texto original, un lector desatento podría figurarse inadvertidamente que un esquema c-inconsistente puede cumplir los requisitos obligados y, en consecuencia, ser cuantificacionalmente válido. Lo que, como se va a demostrar, es imposible.

tipuladas en la línea o arreglo FFFFF...., como lo evidencia la simple lectura de las reglas.

b) S posee t-cuantificaciones. Puede suceder: 1) que lo sean una o varias, pero no todas; o 2) que lo sean todas.

1) En el arreglo donde sólo la o las t-cuantificaciones de S tengan asignadas V y las demás F es imposible que S cumpla alguna de las tres exigencias por lo siguiente:

i) Ninguna t-cuantificación tiene asignada F, por hipótesis.

ii) Ni individualmente ni unidos por conjunción pueden los operandos de las únicas cuantificaciones V-asignadas (*) ser inconsistentes, por hipótesis.

iii) El operando de la única cuantificación V-asignada (si sólo hay una) no puede implicar a ninguno de los de las cuantificaciones F-asignadas, por cuanto, por hipótesis, aquél es c-válido, mientras que ninguno de éstos lo es. Cuando haya más de una t-cuantificación, tampoco podrá la conjunción de sus operandos, que será c-válida, por hipótesis, implicar a cada uno de los operandos de las cuantificaciones F-asignadas que, por hipótesis también, no son c-válidos.

2) Cuando todas las cuantificaciones de S son t-cuantificaciones, basta que todas sean V-asignadas en un arreglo para que sea imposible, como es evidente, que S cumpla en dicho arreglo con alguna de las tres condiciones requeridas para su validez.

(*) Es decir, aquéllas que tienen asignada una V en un determinado arreglo.

De esta manera se ha probado que, en todos los casos posibles, un esquema c-inconsistente S no puede cumplir, por lo menos en uno de sus arreglos, alguno siquiera de los tres requisitos exigidos. Por lo tanto queda demostrado que en ningún caso un esquema c-inconsistente, sometido a QL, puede ser válido.

b) Sea A un arreglo falso de la tabla de valores de un esquema básico cualquiera, $P_i (1 \leq i \leq n)$ cada uno de los operandos de las cuantificaciones V-asignadas en A y n el número de estas cuantificaciones. De acuerdo al texto de la regla 3, inc. b, proceder a la verificación allí exigida puede significar dos cosas diversas: o es preciso comprobar que $P_1, P_2, \ldots, P_n$, $P_1 . P_2, P_1 . P_3, \ldots, P_1 . P_n, P_2 . P_3, P_2 . P_4, \ldots, P_2 . P_n$, $\ldots, P_1 . P_2 \ldots P_n$ (esto es, $2^n - 1$ conjunciones posibles de P_i (*)) son o no c-inconsistentes, o basta inspeccionar $P_1 . P_2 \ldots P_n$ (o únicamente P_1 cuando $n = 1$) con idéntico propósito. La elección entre una y otra alternativa es ciertamente importante si se toma en cuenta la diferencia de trabajo reclamado y la mayor o menor simplicidad que pueda alcanzarse.

No hay duda sin embargo que el segundo camino es el mejor. Obsérvese, en efecto, que si la conjunción $P_1 . P_2 \ldots P_n$ (o P_1 si $n = 1$) es c-inconsistente, no es necesario averiguar más: el arreglo cumple lo exigido por 3b; y si no lo es, su tabla ha de exhibir por lo menos un arreglo donde se asigna V a cada uno de los P_i, en cuyo caso cualquier conjunción de P_i tiene un arreglo V y tampoco puede ser c-inconsistente. Por lo tanto el examen de $P_1 . P_2 \ldots P_n$ es condición suficiente y necesaria para comprobar el cumplimiento de lo prescrito en el inciso aludido.

(*) Entre las que hay que contar, por extensión, cada uno de los P_i.

c) A, P_i ($1 \leq i \leq n$) y n poseen el mismo significado que en el inciso anterior. Se trata ahora de determinar si A cumple o no el requisito contenido en la regla 3, inc. c. Se tiene la impresión, tal como está redactado dicho inciso, que es imprescindible examinar todos los condicionales que tienen por antecedente un P_i o una conjunción cualquiera de P_i y por consecuente el operando Z de una cuantificación F-asignada. Si un arreglo entonces exhibe n cuantificaciones V-asignadas y r F-asignadas, parecería haber necesidad de efectuar sendas evaluaciones tabulares de $r(2^n-1)$ condicionales diferentes para comprobar si el mencionado requisito se cumple o no.

Pero no es así, por suerte para quien se vea en la necesidad de emplear QL. En efecto: si hay una sola cuantificación V-asignada, sólo se examinará el condicional $P \supset Z$, y si hay más de una, se requiere únicamente construir y evaluar el condicional $P_1 . P_2 .... P_n . \supset . Z$, puesto que, o es c-válido, con lo que el requisito queda cumplido, o no lo es, y entonces su tabla ha de exhibir por lo menos un arreglo donde se asigna F a Z y V a cada uno de los P_i, en cuyo caso, para cualquiera conjunción KP_i de P_i, en la tabla del condicional $KP_i \supset Z$ deberá aparecer siempre un arreglo falso. Por lo tanto, si $P_1 . P_2 .... P_n$ no c-implica a Z, tampoco podrá c-implicarlo ninguna otra conjunción formada por alguna combinación de P_i.

Se ha demostrado así que, para cada cuantificación F-asignada de un esquema básico cualquiera, el examen del condicional $P_1 . P_2 .... P_n . \supset . Z$ (ó $P \supset Z$ si $n = 1$) es condición suficiente y necesaria para determinar si A cumple o no con el requisito 3c.

De acuerdo a los resultados obtenidos en los tres incisos precedentes resulta inevitable reformar y completar las reglas 2 y 3 de la prueba de validez de QL, las mismas que bien pueden quedar redactadas en la siguiente forma:

2) Si luego de confeccionar la tabla a que se refiere la regla anterior se aprecia que S es c-válido, la prueba ha concluído y S es válido. Si S es c-inconsistente, también ha concluído la prueba y S no es válido.

3) Si S ni es c-válido ni c-inconsistente, bórrense o suprímanse las líneas o arreglos que arrojen una V final. Para que S sea válido cada uno de los arreglos restantes debe cumplir por lo menos una de estas tres condiciones:

   a) El operando de una cuantificación básica F-asignada es c-válido.

   b) La conjunción de los operandos de todas las cuantificaciones básicas V-asignadas (o el operando de la única, si sólo hay una) es c-inconsistente.

   c) La conjunción de los operandos de todas las cuantificaciones básicas V-asignadas (o el operando de la única, si sólo hay una) c-implica al operando de una cuantificación F-asignada en el mismo arreglo.

5. Los ejemplos que siguen ilustran la aplicación de QL a esquemas monádicos. Los números (1), (2) y (3) que se utilizan en ellos se refieren a la aplicación de las reglas respectivas (modificadas). Cuando es posible y la claridad no sufre mella, se abrevia la tabla de valores a que refiere la regla (1). (Véase al respecto III.7, inc.f, infra).

I) $(\exists x)(fx \vee gx) . \equiv . (\exists x)fx \vee (\exists x)gx$ S

Reemplazando cuantificadores:

$$\sim(x)\sim(fx \vee gx) . \equiv . \sim(x)\sim fx \vee \sim(x)\sim gx$$

(1) $\sim(x)\sim(fx \vee gx) . \equiv . \sim(x)\sim fx \vee \sim(x)\sim gx$

F	V	V	F	V	F	F	V	
F	V	F	F	V	V	V	F	(i)
F	V	F	V	F	V	F	V	(ii)
F	V	F	V	F	V	V	F	(iii)
V	F	F	F	V	F	F	V	(iv)
V	F	V	F	V	V	V	F	
V	F	V	V	F	V	F	V	
V	F	V	V	F	V	V	F	

(2) Como S no es c-válido, debe continuarse con (3).

(3) Tomando en cuenta sólo los arreglos que han resultado falsos, y que se numeran i, ii, iii y iv, se llega a las siguientes comprobaciones:

i) Cumple la condición (c), pues '$\sim(fx \vee gx)$', que tiene asignado V, implica a '$\sim gx$', que tiene asignado F.

ii) Cumple la condición (c), pues '$\sim(fx \vee gx)$', que tiene asignado V, implica a '$\sim fx$', que tiene F.

iii) Cumple también la condición (c), por darse las dos implicaciones consideradas ya en (i) y (ii).

iv) Cumple igualmente la condición (c), pues la conjunción de '$\sim fx$' y '$\sim gx$', que tienen ambos asignado V, implican a '$\sim(fx \vee gx)$', al que le corresponde F.

Como todas las líneas pertinentes cumplen alguna de las tres condiciones, S es válido.

II) $(x)(fx \supset gx) . (\exists x)(hx . fx) . \supset . (\exists x)(hx . gx)$ S

Unificando cuantificadores:

$(x)(fx \supset gx) . \sim(x)\sim(hx . fx) . \supset . \sim(x)\sim(hx . gx)$ S'

(1) No cabe sino un arreglo falso:

$$(x)(fx \supset gx).\sim(x)\sim(hx.fx).\supset.\sim(x)\sim(hx.gx)$$

V   V F   F V

(3) Es patente que el único arreglo no cumple ninguno de los dos primeros requisitos, pero cumple el tercero, pues el condicional

$$fx \supset gx.\sim(hx.gx).\supset.\sim(hx.fx) \quad (*)$$

es c-válido, como se verifica fácilmente. S, esquema del archiconocido modo Darii, es válido.

III) $(\exists x)fx.(\exists x)gx.\supset.(x)(fx \supset \sim gx) \supset (\exists x)(gx.\sim fx).$ S

Unificando cuantificadores:

$\sim(x)\sim fx.\sim(x)\sim gx.\supset.(x)(fx \supset \sim gx) \supset \sim(x)\sim(gx.\sim fx)$ S'

(1) No existe sino un arreglo falso:

$$\sim(x)\sim fx.\sim(x)\sim gx.\supset.(x)(fx \supset \sim gx) \supset \sim(x)\sim(gx.\sim fx)$$

V F   V F   V   F V

(3) Este arreglo no cumple el primer requisito, ni tampoco el segundo, pues '$(fx \supset \sim gx).\sim(gx.\sim fx)$' no es c-inconsistente. Para saber si cumple o no el tercer requisito debe establecerse si alguno de los siguientes condicionales es o no c-válido (**):

i) $fx \supset \sim gx.\sim(gx.\sim fx).\supset.\sim fx$

ii) $fx \supset \sim gx.\sim(gx.\sim fx).\supset.\sim gx$

El segundo lo es, de manera que dos operandos de cuantificaciones básicas V-asignadas implican al de otra

---

(*) Repárese en la configuración de este condicional, tan diferente de la de S' (sin cuantificadores).

(**) De acuerdo a las reglas originales de QL habría necesidad, al parecer, de examinar cuatro condicionales más, fuera de los dos que se indican: $fx \supset \sim gx.\supset.\sim fx$; $fx \supset \sim gx.\supset.\sim gx$; $\sim(gx.\sim fx) \supset \sim fx$; y $\sim(gx.\sim fx) \supset \sim gx$.

F-asignada y así se satisface el tercer requisito. S es válido.

IV) $$[p . \supset . q . (x)(fx \supset \sim gx)] . [q \supset (\exists x)(fx . gx \vee hx)] . \supset . [p \supset (\exists x)(hx . \sim gx)]$$ (*) S

Unificando los cuantificadores:

$$[p . \supset . q . (x)(fx \supset \sim gx)] . [q \supset \sim (x) \sim (fx . gx \vee hx)] . \supset . [p \supset \sim (x) \sim (hx . \sim gx)]$$

(1) $$[p . \supset . q . (x)(fx \supset \sim gx)] . [q \supset \sim (x) \sim (fx . gx \vee hx)] . \supset . [p \supset \sim (x) \sim (hx . \sim gx)]$$ (**)

V	V	VV	V	F	V	FF	V	V	V	FF	V
V	V	VV	V	F	V	FF	V	V	V	VV	F
V	V	VV	V	V	V	VV	F	F	V	FF	V
V	V	VV	V	V	V	VV	F	V	V	VV	F
V	F	VF	F		V	F	V		V	F	V
V	F	VF	F		V	F	V		V	V	F
V	F	VF	F		V	V	F		V	F	V
V	F	VF	F		V	V	F		V	V	F
V	F	FF	V		F	F	V		V	F	V
V	F	FF	V		F	F	V		V	V	F
V	F	FF	V		F	V	F		V	F	V
V	F	FF	V		F	V	F		V	V	F
V	F	FF	F		F	F	V		V	F	V
V	F	FF	F		F	F	V		V	V	F
V	F	FF	F		F	V	F		V	F	V
V	F	FF	F		F	V	F		V	V	F

(*) De Quine, Métodos, p. 171.
(**) No es necesario efectuar sino los dieciseis primeros arreglos, pues en los dieciseis restantes 'p' tiene asignado 'F', de manera que el consecuente será siempre V y el arreglo también V. Así mismo, como el primer componente del antecedente es F en los doce últimos arreglos de la mitad superior de la tabla, el antecedente será siempre F en ellos, que habrán de ser entonces necesariamente V. Quedan por resolver totalmente sólo los cuatro primeros arreglos de la tabla.

(3) Analizando el único arreglo que resulta falso, se aprecia que no cumple ni el primero ni el segundo requisito. Para que cumpla el tercero es preciso que sea c-válido el siguiente condicional:

$$(fx \supset \sim gx) . \sim(hx . \sim gx) . \supset . \sim(fx . gx \vee hx).$$

Como en efecto lo es, S es válido.

6. Los ejemplos resueltos a continuación sirven para aclarar la aplicación <u>completa</u> de QL, es decir, tanto la técnica depurativa como la prueba de validez. Ningún esquema de los sometidos aquí a QL es, naturalmente, básico.

I) $(y)[\sim fy \vee (\exists x)fx]$ S

$(y)[\sim fy \vee \sim(x)\sim fx]$ S'

Depurando S' :

$\sim fy \vee \top$ $\quad\quad$ $\sim fy \vee \bot$

$\top$ $\quad\quad$ $\sim fy$

$$\sim(x)\sim fx . \top . \vee . (x)\sim fx . (y)\sim fy$$

$$\sim(x)\sim fx . \vee . (x)\sim fx . (y)\sim fy$$

$$\sim(x)\sim fx \vee (y)\sim fy$$

$$\sim(x)\sim fx \vee (x)\sim fx$$

Aplicando la prueba de validez:

(1) $\sim(x)\sim fx \vee (x)\sim fx$

F	V	V	V
V	F	V	F

(2) El esquema ha resultado ser c-válido. Por lo tanto S es válido.

II) $(x)(fx . p) . \supset . (\exists x)(gx . \supset . fx . p)$ (*) S

$(x)(fx . p) . \supset . \sim(x)\sim(gx . \supset . fx . p)$ S'

(*) De Quine, Métodos, p. 265, apenas modificado.

Depurando primero el antecedente y luego el consecuente de S' :

a)

$$fx.\mathrm{T} \qquad fx.\mathrm{F}$$
$$fx \qquad \mathrm{F}$$
$$p.(x)fx.\vee.\sim p.\mathrm{F}$$
$$p.(x)fx$$

b)

$$\sim(gx.\supset.fx.\mathrm{T}) \qquad \sim(gx.\supset.fx.\mathrm{F})$$
$$\sim(gx \supset fx) \qquad \sim(gx \supset \mathrm{F})$$
$$\sim\sim gx$$
$$gx$$
$$p.(x)\sim(gx \supset fx).\vee.\sim p.(x)gx$$

El esquema básico equivalente a S' es

$$p.(x)fx.\supset.\sim[p.(x)\sim(gx \supset fx).\vee.\sim p.(x)gx]. \qquad \mathrm{A}$$

Simplificando A:

$$p.(x)fx.\supset.\sim p \vee \sim(x)(gx.\sim fx).p \vee \sim(x)gx$$

Aplicando la prueba de validez:

(1) $p.(x)fx.\supset.\sim p \vee \sim(x)(gx.\sim fx).p \vee \sim(x)gx$

VV V	F	F F F V	FVV F V
VV V	F	F F F V	FVV V F
VV V	V	F V V F	VVV F V
VV V	V	F V V F	VVV V F

No hace falta proseguir con la tabla, pues los coce arreglos restantes, por ser en ellos falso el antecedente, serán todos verdaderos.

(3) En los dos únicos arreglos que han resultado F, se ha asignado V a '(x)fx' y a '(x)(gx.~fx)'. Como la conjunción de sus operandcs es inconsistente, queda cumplida, por ambos, el requisito (b), y S tiene que ser válido.

III) $$(x)[fx.gy. \supset .(y)(fy.gy)]$$ S

Extrayendo 'gy' :

$$fx.T. \supset .p \qquad\qquad fx.F.\supset .p$$
$$fx \supset p \qquad\qquad\qquad T$$
$$gy.(x)[fx \supset (y)(fy.gy)]. \vee .\sim gy.T$$
$$\sim gy \vee (x)[fx \supset (y)(fy.gy)]$$

Depurando el segundo miembro de la disyunción:

$$fx \underset{T}{\supset} T \qquad\qquad fx \underset{\sim fx}{\supset} F$$
$$(y)(fy.gy).T. \vee .\sim(y)(fy.gy).(x)\sim fx$$
$$(x)\sim fx \vee (y)(fy.gy)$$

De manera que S se reduce al esquema

$$\sim gy \vee (x)\sim fx \vee (y)(fy.gy) .$$ S'

Pero S' no es todavía un esquema básico, pues exhibe una variable libre. Para cerrarlo es preciso escribir '$\sim$gz' en vez de '$\sim$gy' y cuantificar universalmente todo S' respecto a 'z', formándose así el esquema

$$(z)[\sim gz \vee (x)\sim fx \vee (y)(fy.gy)]$$

que se depura así:

$$\sim gz \vee T \qquad\qquad\qquad \sim gz \vee F$$
$$T \qquad\qquad\qquad\qquad \sim gz$$
$$(x)\sim fx \vee (y)(fy.gy).T. \vee .\sim[(x)\sim fx \vee (y)(fy.gy)].(z)\sim gz$$
$$(z)\sim gz \vee (x)\sim fx \vee (y)(fy.gy)$$
$$(x)\sim gx \vee (x)\sim fx \vee (x)(fx.gx)$$ A

A tiene un sólo arreglo falso: cuando todas las cuantificaciones básicas tienen asignada una F. Y en tal arreglo es imposible cumplir alguna siquiera de las tres condiciones estipuladas: S no es válido.

IV) $$(\exists x)(y)(fx \equiv fy)$$ S

$$\sim(x)\sim(y)(fx \equiv fy)$$ S'

Depurando '$(y)(fx \equiv fy)$' : (*)

$$\begin{array}{ccc} T \equiv fy & & F \equiv fy \\ T \supset fy . fy \supset T & & F \supset fy . fy \supset F \\ fy . T & & T . \sim fy \\ fy & & \sim fy \end{array}$$

$$fx . (y) fy . \vee . \sim fx . (y) \sim fy$$

S' queda transformado en

$$\sim (x) \sim [fx . (y) fy . \vee . \sim fx . (y) \sim fy] .$$

Extrayendo '$(y)fy$' :

$$\begin{array}{ll} \sim [fx . T . \vee . \sim fx . (y) \sim fy] & \sim [fx . F . \vee . \sim fx . (y) \sim fy] \\ \sim [fx . \vee . \sim fx . (y) \sim fy] & \sim [\sim fx . (y) \sim fy] \\ \sim [fx . \vee . (y) \sim fy] & \end{array}$$

$$\sim [(y) fy . (x) \sim \{fx . \vee . (y) \sim fy\} . \vee . \sim (y) fy . (x) \sim \{\sim fx . (y) \sim fy\}] \quad S''$$

Depurando '$(x) \sim [fx \vee (y) \sim fy]$' :

$$\begin{array}{ccc} \sim (fx \vee T) & & \sim (fx \vee F) \\ F & & \sim fx \end{array}$$

$$(y) \sim fy . F . \vee . \sim (y) \sim fy . (x) \sim fx$$

$$\sim (y) \sim fy . (x) \sim fx$$

Depurando '$(x) \sim [\sim fx . (y) \sim fy]$' :

$$\begin{array}{ccc} \sim (\sim fx . T) & & \sim (\sim fx . F) \\ fx & & T \end{array}$$

$$(y) \sim fy . (x) fx . \vee . \sim (y) \sim fy . T$$

$$\sim (y) \sim fy \vee (x) fx$$

Reemplazando en S" las cuantificaciones impuras por sus

(*) En Logic no aparecen reglas de reducción para ' $\equiv$ ' , de modo que es preciso buscar primero equivalentes composicionales de '$T \equiv fy$' y '$F \equiv fy$' a los que puedan aplicarse las reglas de reducción <u>indicadas expresamente en dicho texto</u>. En Métodos, obra posterior, se proporcionan ya las reglas '$T \equiv p$' eq 'p' y '$F \equiv p$' eq '$\sim p$', perfectamente incorporables, pero sin mayor importancia práctica, a la técnica reductiva de QL.

respectivos equivalentes y unificando la variable:

$$\sim[(y)fy.\sim(y)\sim fy.(x)\sim fx. \vee .\sim(y)fy.\sim(y)\sim fy \vee (x)fx]$$

$$\sim[(x)fx.\sim(x)\sim fx.(x)\sim fx. \vee .\sim(x)fx.\sim(x)\sim fx \vee (x)fx]$$

Simplificando:

$$\sim[\sim(x)fx.\sim(x)\sim fx \vee (x)fx]$$

$$(x)fx. \vee .(x)\sim fx.\sim(x)fx$$

$$(x)fx \vee (x)\sim fx$$

Aplicando la prueba de validez:

(1)

(x)fx	∨	(x)∼fx
V	V	V
V	V	F
F	V	V
F	F	F

(3) El arreglo falso no cumple ninguno de los requisitos prescritos. S, por consiguiente, no es válido.

7. Las observaciones hechas hasta aquí acerca de QL y otras pocas consideraciones más se resumen en los incisos siguientes.

a) La técnica de reducción incorporada a QL asume de facto la técnica resolutiva expuesta detalladamente por Quine, varios años más tarde, en Methods of Logic. Esta técnica, "eleganter, aber unanschaulicher" que el método tabular (*), aunada a las inevitables peripecias de la depuración de cuantificaciones incluso moderadamente complejas, requiere una apreciable capacidad operativa.

Si a esto se suma que el método concebido con idéntico própósito por H. Behmann (**) es mucho más simple y di

(*) Así opina Richard Stender (Didaktische Themen, p.21, nota 8).
(**) Véase Heinrich Behmann, Algebra der Logik, pp. 189-191.

recto, si cabe la expresión, debe admitirse sin grandes titubeos que QL, en esta fase al menos, no es el mejor de los procedimientos decisorios. Incluso el propio Quine adoptó posteriormente la susodicha técnica, descartando ésta que se comenta aquí (*).

b) La prueba de validez de QL no contempla, de la manera explícita y precisa que sería de desear, la forma de llevar adelante las comprobaciones que reclama la regla 3, y pasa por alto la específica situación de los esquemas c-inconsistentes. Como se ha visto en III.4, supra, para salvar dicha desatención y abreviar considerablemente la referida prueba de validez urge incorporar un enunciado adicional a la segunda de sus reglas y poner en claro algunos puntos de la tercera.

Asimismo ha debido indicarse expresamente que cuando la reducción de un esquema no básico conduce a una tautología de la forma 'p∨ ∼p', como en el ejemplo IV (véase III.2 c, supra), o a 'F', como en el ejemplo V (loc. cit.), no es necesario proseguir con la prueba de validez, pues dichos esquemas han resultado ser ya, en definitiva, válido e inválido, respectivamente.

c) Como en el caso de QS, no es posible aplicar tampoco la prueba de validez de QL a fórmulas con constantes individuales, indispensables en el análisis de inferencias con proposiciones singulares. La razón es por demás simple: salvo el caso de las c-válidas, a las demás, por su peculiar conformación, les es imposible satisfacer, en principio, aún siendo cuantificacionalmente válidas, las exigencias que plantea QL.

(*) Véase IV.6 infra.

d) Poco se puede decir de la laboriosidad de la prueba de validez de QL que no sea aplicable a los demás métodos de Quine y, en principio, a todos los procedimientos decisorios conocidos. Es digna de mención, sin embargo, la fácil aplicabilidad de QL en ciertos casos, sobre todo cuando el esquema es de tal estructura que el número de arreglos decisivos se reduce a una cifra mínima. Entre dichos esquemas se hallan, por ejemplo, los condicionales, cuyo análisis requiere el examen de un único arreglo: a) cuando el antecedente es una conjunción, una disyunción negada o un condicional negado(como el antecedente será verdadero en un solo arreglo,no queda otra cosa que inspeccionar el consecuente de dicho arreglo); o b) cuando el consecuente es una disyunción, una conjunción negada o un condicional (en todos estos casos el consecuente es falso en un arreglo y no hace falta sino ver si en dicho arreglo el antecedente resulta ser verdadero).

Un ejemplo cabal de esta eventual simplicidad lo da la solución de todos los esquemas condicionales cuyo antecedente sea una conjunción y el consecuente una cuantificación básica, como en el caso de todos los silogismos, conjugándose en tales esquemas las dos situaciones descritas en el aparte anterior. Basta en tales casos inspeccionar sólo un arreglo de los ocho que forman parte de la tabla de valores. También son fáciles de resolver, por exhibir apenas un arreglo falso, los esquemas básicos disyuntivos y sus equivalentes.

e) Pero la facilidad no es la regla general. Existen tipos de esquemas básicos que obligan a la inspección de una gran parte de los arreglos de su respectiva tabla, como en el caso de los esquemas conjuntivos, falsos en todos los arreglos menos en uno, y en el de los esquemas condicionales: a) que tengan como antecedente una disyunción, una conjunción negada o un condicional; o b) que tengan como consecuente una conjunción, una disyunción negada o un condicional negado. Por razones simétricas a las indicadas en el inciso anterior, el número de arreglos falsos puede llegar a ser tan alto como el de un esquema conjuntivo: piénsese por ejemplo en un esquema condicional cuyo antecedente es una disyunción y el consecuente una conjunción o un condicional negado.

No es remota además, incluso tratándose de esquemas nada extraordinarios, la posibilidad de tablas con 16 ó 32 arreglos, cuyo escrutinio, por regla general, demanda muchísima atención.

f) No escapa a nadie que la necesidad de establecer si cada arreglo falso cumple o no por lo menos una de las tres condiciones estipuladas por la Regla 3 obliga a realizar, mentalmente o por escrito, con o sin atajos o métodos abreviados, una serie de tablas. Al tratarse de la primera exigencia dicha labor es de hecho bastante fácil, siempre que los operandos sean lo suficientemente simples, pero cuando se está averiguando el cumplimiento o incumplimiento de las otras dos, la cosa corre el riesgo de embrollarse en demasía, pues deben ser tomados en cuenta todos los condicionales y conjunciones cuya c-validez ha de investigarse y cuyo número, en buena hora, ha podido ser reducido apreciablemente merced a las modificaciones propuestas en III.4 supra.

Si se supone que un esquema exhibe cuatro cuantificaciones básicas diferentes, de las cuales una es V- y las tres restantes F-asignadas en una línea o arreglo falso, han de construírse tres condicionales diferentes para comprobar si esta línea cumple o no el requisito 3c. Cuando las cuantificaciones son cinco, y cuatro de ellas F-asignadas, el número de condicionales llega a cuatro. De manera que si, por ejemplo, un esquema contara con cuatro cuantificaciones básicas diferentes y fueran $2^4 - 1$ los arreglos falsos que exhiben por lo menos una cuantificación básica V-asignada, de acuerdo a la regla 3c - ¡modificada! - habría necesidad de efectuar, sólo para verificar dicho requisito, veintiocho tablas accesorias (y si las cuantificaciones fueran cinco y $2^5 - 1$ los arreglos falsos con las características anotadas, el número de tablas accesorias ascendería a setenta y cinco).

La cantidad de tablas accesorias, por tanto, puede elevarse desmesuradamente, con lo cual se torna controvertible, por decir lo menos, la facilidad de la prueba de validez de QL.

g) Claro está que existen atajos o "practical shortcuts"(*) perfectamente aceptables, y, sobre todo, recomendables, si es que se desea aligerar el trabajo, pero no cabe duda que cuando alguien los utiliza, cediendo a los dictados de su sagacidad o de su malicia, la prueba de validez de QL deja en ese mismo instante de ser un procedimiento decisorio, pues los inevitables razonamientos adicionales (como, entre otros, los del ejemplo IV en III.5, supra) desnaturalizan su carácter algorítmico(**).

La alternativa queda pues a la vista: o se llevan a cabo todas las operaciones ordenadas por QL, con lo que puede llegar a ser su aplicación, en muchísimos casos, de lo más tediosa, o se opta por la vía más corta

(*) Logic, p. 7.
(**) En el riesgo que puede significar para el no experimentado la seducción de la brevedad no es preciso siquiera insistir.

- ¡cuando la haya! - y entonces aquél deja de ser algorítmico y por tanto decisorio, lo cual, si bien no impide que puedan alcanzarse resultados correctos con deducciones adecuadas, tiene suma importancia desde el punto de vista teórico, nada desdeñable por cierto.

h) No parece haber quedado Quine satisfecho del todo con QL. En Methods of Logic, obra destinada a "desarrollar técnicas adecuadas del razonamiento formal" dando preferencia a la "facilidad técnica" sobre la "elegancia" (*), QL es reemplazado por el nuevo procedimiento que se describe y comenta en el capítulo próximo.

(*) Métodos, p. 21.

C A P I T U L O IV

El Procedimiento QM

1. Los esfuerzos de Quine por perfeccionar una técnica decisoria para fórmulas monádicas de primer grado culminan, por lo menos hasta hoy, con el procedimiento que aparece en Methods of Logic (revised edition), New York, 1959 (*). Éste, que en lo sucesivo será designado con las letras QM, proviene en parte, según afirma el propio autor, del presentado en "On the Logic of Quantification" y "una y otra solución son reminiscencias de procedimientos desarrollados por Behmann (1922) y Parry (1932)" (**), siendo mucho más ágil y pronto que el QS, "que tiende a desarrollos más largos y laboriosos"(+). Anderson y Johnstone, por su parte, lo consideran "perhaps the most practical procedure" entre todos los procedimientos decisorios en uso (++).

QM es decisorio para tres clases de esquemas monádicos: a) esquemas cuantificacionales uniformes cerrados, denominados "puros" en ciertos pasajes, que no son otra cosa que los ya conocidos esquemas básicos; b) esquemas "mixtos" ("mixed schemata"), esquemas básicos "con el añadido de letras sentenciales

---

(*) Esta edición revisada no modifica en nada substancial, en lo que concierne al punto aquí estudiado, a la primera edición de 1950, donde se expone el método por primera vez. La traducción castellana de la edición de 1959, debida a Manuel Sacristán, lleva por título "Los Métodos de la Lógica" (Barcelona, Ariel, 1962).

(**) Métodos, p. 170, n. 1. En lo sucesivo, y para comodidad del lector, las referencias se tomarán, como en este caso, de la traducción castellana, no del todo feliz, mencionada en la nota anterior.

(+) Loc. cit.

(++) Natural deduction, p. 338, donde se halla vertido en dos líneas: una vez negado el esquema "we reduce this to normal form and determine whether it is satisfiable - if not, the argument is valid". Ya se verá si la cosa es tan simple.

o de enunciado" (*); y c) esquemas "atípicos" ("nonstandard"), los cuales, a diferencia de los dos anteriores (típicos o "standard") (**), poseen cuantificaciones impuras, esto es, cuantificaciones en cuyos operandos aparecen componentes que "no muestran instancias libres de la variable cuantificada" (+).

Es de interés anotar que cuando Quine habla de los esquemas monádicos solubles mediante QM, piensa únicamente en esquemas condicionales (++), sin mencionar en parte alguna cómo QM puede ser y es en efecto aplicable a cualquier otro tipo de esquema monádico. Quine, aparte de los esquemas condicionales, sólo aborda el caso de la prueba de la equivalencia, reduciéndola, como no puede ser de otro modo, a una doble y recíproca prueba de implicación (*+). Pero nada obsta para reducir también la prueba de la conjunción o de la disjunción a la de implicación, sabiéndose como se sabe que todo esquema monádico puede transformarse en un esquema condicional, negado o no, equivalente. Sin embargo , como se verá luego, no es forzosa tal reducción previa, que se menciona sólo como justificación o razón teórica, pudiendo QM ser aplicado directamente a cualquier esquema monádico (+*).

La versión de QM ofrecida en las páginas que siguen prescinde deliberadamente de esta limitación que Quine implícitamente parece imponerle y, además, pese a la rigurosa fidelidad que se observará en lo que respecta al contenido, habrá de diferir

---

(*) Métodos, p. 262.
(**) Loc. cit.
(+) Ibid., p. 263.

(++) Ibid., p. 153 y 154.
(*+) Ibid., p. 168.
(+*) La reducción de un esquema equivalente o bicondicional a dos esquemas condicionales propuesta por Quine (loc. cit.) no es siquiera una condición para la aplicación de QM a dicho tipo de esquemas, sino una concesión en favor de la facilidad del trabajo, pues nada impide someter de inmediato a QM un esquema bicondicional.

bastante de la exposición original, más bien dilatada y dispersa, que hace lo suyo para tornar la comprensión de QM en algo mucho más arduo de lo que es en realidad.

2. Reposa el procedimiento QM en una idea central: Si un esquema cualquiera S es válido, su contradictorio $\sim S$ será inconsistente. De manera que decidir sobre la validez de S equivale a decidir sobre la inconsistencia de $\sim S$. El problema por resolver se convierte entonces en cómo determinar si un esquema $\sim S$ es o no consistente (*).

Para ello se somete a $\sim S$ a una serie de transformaciones que habrán de culminar irremisiblemente en uno de tres resultados: 'V', 'F' o un esquema, con ciertos requisitos formales, que Quine llama "esquema canónico". El resultado V indicará que $\sim S$ es composicionalmente válido y que S, por tanto, es válido. El resultado F significará a su vez la inconsistencia composicional de $\sim S$ y, por lo mismo, la validez de S. En la tercera y última alternativa no hay más remedio que proceder a una "prueba de consistencia", como la denomina Quine, para saber si el esquema monádico alcanzado es o no consistente. Si lo fuere, S no es válido. En caso contrario S es válido.

Esta idea central de QM se plasma en una serie ordenada de fases, descritas a continuación (**):

Sea S, por ejemplo, el esquema cuantificacional uniforme

$$(x)\sim(Fx.Gx.\sim Hx).\sim(x)(Hx. \supset .Fx.Gx).\sim(\exists x)[Gx.\sim(Gx \vee Hx)] \quad S$$

Se trata de determinar si S es válido o no. El primer paso o paso preparatorio consiste en la negación de S para obte-

(*) Recuérdese que debe entenderse "consistencia" como consistencia cuantificacional, a diferencia de "c-consistencia" o consistencia composicional.
(**) Se empezará exponiendo la aplicación de QM a esquemas básicos o uniformes, destinando 4 y 6, infra, al tratamiento de los esquemas mixtos y atípicos.

ner su contradictorio

$\sim\{(x)\sim(Fx.Gx.\sim Hx).\sim(x)(Hx. \supset .Fx.Gx).\sim(\exists x)[Gx.\sim(Gx \vee Hx)]\}$. $\sim S$

En seguida se debe internar la negación hasta donde sea posible, obteniéndose de este modo un esquema $\sim S_0$, equivalente a $\sim S$:

$\sim (x)\sim(Fx.Gx.\sim Hx) \vee (x)(Hx. \supset .Fx.Gx) \vee (\exists x)[Gx.\sim(Gx \vee Hx)]$ $\sim S_0$

Debe procederse luego a las siguientes operaciones:

a) Substitución de los cuantificadores universales por cuantificadores existenciales y eliminación de las dobles negaciones que puedan resultar, recomendándose, para mayor comodidad operativa, suprimir todas las 'x': "de ello no puede resultar ambigüedad alguna, pues basta con que sobrentendamos una 'x' táctica detrás de cada letra mayúscula (*) y de cada '($\exists$)' " (**). También conviene eliminar los paréntesis de '($\exists$)'. $\sim S_0$ se escribirá entonces:

$\exists(F.G.\sim H) \vee \sim\exists\sim(H. \supset .F.G) \vee \exists[G.\sim(G \vee H)]$ $\sim S_1$

b) Transformación de cada operando en "esquema normal"(+) o en un esquema de la forma 'F.~F'. De los tres operandos de $\sim S_1$ el primero es ya un esquema normal, de manera que sólo los otros dos requieren manipulación. El proceso es el siguiente:

(*) Téngase presente que en Métodos "letra mayúscula" es sinónimo de "letra o variable predicativa". Este motivo, más el respeto al texto original, ha llevado a cambiar, sólo en este capítulo, la escritura usual de las fórmulas cuantificadas.
(**) Op. cit., p. 157.
(+) Según Métodos, p. 99, a) una letra proposicional o su negación se denomina "literal"; b) un literal o una conjunción de literales en la que ninguna letra aparece dos veces se denominan "esquemas fundamentales"; y c) un "esquema normal" es siempre o un esquema fundamental o una disyunción de éstos.

$$\exists(F.G.\sim H) \vee \sim \exists[H.\sim(F.G)] \vee \exists(G.\sim G.\sim H)$$
$$\exists(F.G.\sim H) \vee \sim \exists(H.\sim F \vee \sim G) \vee \exists(G.\sim G.\sim H)$$
$$\exists(F.G.\sim H) \vee \sim \exists(H.\sim F. \vee .H.\sim G) \vee \exists(G.\sim G.\sim H) \qquad \sim S_2$$

c) Reducción de $\sim S_2$ mediante el método resolutivo, substituyendo por '$\perp$' toda ocurrencia de '$\exists(F.\sim F)$'. $\sim S_3$, el resultado, es equivalente a

$$\exists(F.G.\sim H) \vee \sim \exists(H.\sim F. \vee .H.\sim G) \vee \perp$$
$$\exists(F.G.\sim H) \vee \sim \exists(H.\sim F. \vee .H.\sim G) \quad . \qquad \sim S_3$$

Esta reducción conduce a una de dos alternativas:

I) $\sim S_2$ se resuelve en '$\top$' o en '$\perp$'. La decisión, en este caso, se ha alcanzado: $\sim S_2$ será c-válido (y S, por tanto, no válido) si aquella culmina en '$\top$' y c-inconsistente (y S válido) si lo hace en '$\perp$'.

II) $\sim S_2$ no se resuelve ni en '$\top$' ni en '$\perp$', como en el caso del ejemplo, dando lugar, en cambio, a otro esquema equivalente $\sim S_3$. El proceso, en tal caso, debe proseguir.

d) Distribución de los cuantificadores existenciales respecto a las disyunciones de los operandos. El resultado será $\sim S_4$, compuesto exclusivamente por cuantificaciones existenciales de "esquemas abiertos fundamentales", esto es, esquemas fundamentales en los que aparecen 'Fx', 'Gx', etc., en vez de 'p', 'q', etc. (*). Se tiene entonces, continuando con el ejemplo,

$$\exists(F.G.\sim H) \vee \sim[\exists(H.\sim F) \vee \exists(H.\sim G)] \quad . \qquad \sim S_4$$

e) Si $\sim S_4$ "es como un esquema normal ..... excepto en que en lugar de las letras esquemáticas tiene cuantifica—

(*) Ibid., p. 157 .

ciones existenciales de esquemas abiertos fundamentales" (*), se dice que $\sim S_4$ es el "esquema canónico" de $\sim S$. Si $\sim S_4$ no lo fuera ya, deben tratarse sus cuantificaciones como letras proposicionales y transformarlo mediante conocidas reglas de la Lógica Proposicional hasta llegar, bien a un esquema c-inconsistente (**), bien al esquema canónico de $\sim S$. En el primer caso la operación ha terminado: S es válido. En el segundo habrá aún necesidad de saber si el esquema canónico obtenido es consistente o no. Volviendo al ejemplo, la transformación indicada conduce al siguiente esquema canónico:

$$\exists(F.G.\sim H). \vee .\sim\exists(H.\sim F).\sim\exists(H.\sim G) \qquad \text{EC}$$

Un esquema canónico debe ser forzosamente:

i) La cuantificación existencial de un esquema abierto fundamental (Ejemplos: $\exists F, \exists\sim F, \exists(F.G), \exists(\sim F.G.\sim H)$)

o ii) la negación de un esquema de la forma (i)

o iii) la conjunción de dos o más esquemas de la forma (i)

o iv) la conjunción de dos o más esquemas de la forma(ii)

(*) Ibid., p. 158.

(**) Tanto en Methods, p. 106,como en Métodos, p. 158, aparece escrito '$\top$' en vez de "inconsistente". Debe presumirse que aquí existe error, pues Quine, al explicar este punto, habla de "transformar [$\sim S_4$] por el método del parágrafo 10" (loc.cit.). Y este método no es otra cosa que "una rutina general para transformar cualquier [truth-function] en un esquema equivalente que es '$p.\sim p$' o un esquema normal"(op. cit., p. 100),es decir, que es c-inconsistente o no lo es. Además, desde el punto de vista de la prueba de validez de QM, que es lo que al fin y al cabo interesa, traer a colación la diferencia entre la c-validez y la c-consistencia de un esquema canónico es inconducente e inútil,pues en ambos casos, como se verá en el inciso siguiente, dicho esquema es consistente (y S, naturalmente, inválido). La diferencia, en cambio, entre la c-inconsistencia y cualquiera de las otras dos posibilidades sí es decisiva. Todo hace sospechar, por lo tanto, que debe leerse '$\perp$' en vez de'$\top$'.

o v) la conjunción de dos o más esquemas de las formas (i) y (ii)

o vi) la disyunción de dos o más esquemas de las formas (i) - (v).

EC, obvio resulta decirlo, es un esquema canónico de la forma (vi) por tratarse de la disyunción entre un esquema de la forma (i) y otro de la forma (iv).

f) Quine demuestra (*) lo siguiente:

a) Los esquemas canónicos de las formas (i), (ii) y (iii) son siempre consistentes.

b) Los de la forma (iv) son consistentes si y sólo si la expresión que resulta de borrar los cuantificadores es c-consistente.

c) Los de la forma (v) son consistentes si y sólo si ninguno de los operandos de las cuantificaciones no negadas del esquema canónico implican composicionalmente a la disyunción de operandos de las demás cuantificaciones (o al operando de la cuantificación restante, si sólo hubiera una).

d) Los de la forma (vi) son consistentes si y sólo si al menos uno de los miembros de la disyunción es consistente.

Las operaciones que demandan estas reglas constituyen lo que llama Quine "prueba de consistencia"; una vez cumplida ésta se sabrá ya si un esquema canónico es consistente o no, y, por supuesto, si el esquema básico inicial es o no válido. La consistencia de aquél acarrea la de ~S y, al mismo tiempo, la invalidez de S, mientras que su inconsistencia determina

---

(*) Ibid., pp. 161-167.

la de $\sim S$ y la validez de S.

En el ejemplo que se ha venido desarrollando, $\sim S_5$ es consistente por pertenecer a la forma (vi) y ser consistente el primero de sus componentes, comprendido en la forma (i). S, por tanto, no es válido.

3. En esta sección se ofrecen algunos sencillos ejemplos de la aplicación de QM.

I) $$(\exists x)(fx \equiv fx) \qquad S$$

$$\sim \exists(F \equiv F) \qquad \sim S$$

Hallando el esquema normal del operando:

$$\sim \exists(F \supset F . F \supset F)$$

$$\sim \exists(F \supset F)$$

$$\sim \exists(\sim F \vee F)$$

Distribuyendo el cuantificador:

$$\sim[\exists \sim F \vee \exists F]$$

Canonizando:

$$\sim \exists \sim F . \sim \exists F \qquad EC(iv)$$

Borrando los cuantificadores:

$$F . \sim F$$

Como EC ha resultado ser inconsistente, S es válido.

II) $$(x)(fx . gx \vee \sim fx) \qquad S$$

Substituyendo el cuantificador y negando la expresión resultante:

$$\exists \sim (F . G \vee \sim F) \qquad \sim S$$

Normalizando el operando y distribuyendo el cuantificador:

$$\exists[\sim(F . G) . \sim \sim F]$$

$$\exists[\sim F \vee \sim G . F]$$

$$\exists[\sim F.F.\vee.\sim G.F]$$
$$\exists(\sim F.F).\vee.\exists(\sim G.F)$$

Substituyendo '$\exists(\sim F.F)$' por '$\perp$' y resolviendo:

$$\perp\vee\exists(\sim G.F)$$
$$\exists(\sim G.F) \qquad \text{EC(.i)}$$

De acuerdo a lo indicado $\sim S$ es consistente, y S, por tanto, no es válido.

III) $(x)(fx\supset gx).(\exists x)(hx.fx).\supset.(\exists x)(hx.gx)$ S

Substituyendo cuantificadores y negando S:

$$\sim[\sim\exists\sim(F\supset G).\ \exists(H.F).\supset.\ \exists(H.G)] \qquad \sim S$$

Simplificando y normalizando los operandos:

$$\sim\exists\sim(F\supset G).\ \exists(H.F).\sim\exists(H.G)$$
$$\sim\exists(F.\sim G).\ \exists(H.F).\sim\exists(H.G) \qquad \text{EC(V)}$$

Como el único componente no negado de EC implica a la disyunción de los negados, lo que se comprueba fácilmente efectuando la tabla de valores para '$H.F.\supset:F.\sim G.\vee.H.G$' , $\sim S$ es inconsistente y S válido.

IV) $(x)(hx.\supset.cx.dx).(\exists x)(hx.cx\vee Sx).\supset.(\exists x)(cx.Sx)$ S

Substituyendo los cuantificadores y negando S:

$$\sim[\sim\exists\sim(H.\supset.C.D).\ \exists(H.C\vee S).\supset.\ \exists(C.S)] \qquad \sim S$$

Simplificando $\sim S$ y normalizando los operandos:

$$\sim\exists\sim(H.\supset.C.D).\ \exists(H.C\vee S).\sim\exists(C.S)$$
$$\sim\exists[H.\sim(C.D)].\ \exists(H.C.\vee.H.S).\sim\exists(C.S)$$
$$\sim\exists[H.\sim C\vee\sim D].\ \exists(H.C.\vee.H.S).\sim\exists(C.S)$$
$$\sim\exists[H.\sim C.\vee.H.\sim D].\ \exists(H.C.\vee.H.S).\sim\exists(C.S)$$

Distribuyendo los cuantificadores y canonizando:

$$\sim[\exists(H.\sim C)\vee\exists(H.\sim D)].\ \exists(H.C)\vee\exists(H.S).\sim\exists(C.S)$$
$$\sim\exists(H.\sim C).\sim\exists(H.\sim D).\ \exists(H.C)\vee\exists(H.S).\sim\exists(C.S)$$

$\sim \exists(H.\sim C).\sim \exists(H.\sim D).\sim \exists(C.S).\ \exists(H.C).\vee.$
$.\vee.\sim \exists(H.\sim C).\sim \exists(H.\sim D).\sim \exists(C.S).\ \exists(H.S)$ EC(vi)

El primer componente de la disyunción pertenece a la forma V y debe por tanto establecerse si es o no válido el condicional:

$$H.C.\supset : H.\sim C.\vee.H.\sim D.\vee.C.S$$

Como no hay implicación, dicho componente es consistente. No hay necesidad de continuar pues con el resultado obtenido EC y $\sim$S son consistentes. De manera que S es inválido.

V) $(\exists x)fx.(\exists x)gx.\supset.(x)(fx\supset \sim gx)\supset(\exists x)(gx.\sim fx)$ S

$\sim[\exists F.\exists G.\supset.\sim \exists\sim(F\supset\sim G)\supset \exists(G.\sim F)]$ $\sim$S

Simplificando, normalizando los operandos y canonizando la expresión:

$\exists F.\ \exists G.\sim[\sim \exists\sim(F\supset \sim G)\supset \exists(G.\sim F)]$
$\exists F.\ \exists G.\sim \exists\sim(F\supset \sim G).\sim \exists(G.\sim F)$
$\exists F.\ \exists G.\sim \exists(F.G).\sim \exists(G.\sim F)$ EC(v)

Debe considerarse ahora si 'F' y 'G' implican, por separado, la disyunción de los operandos de los otros dos componentes.

a) $F.\supset : F.G.\vee.G.\sim F$

'F' no implica a la disyunción, como es fácil apreciar.

b) $G.\supset.F.G.\vee.G.\sim F$

'G' sí la implica, de manera que, como ninguno de los operandos no negados debe implicar a la disyunción de los negados en caso de ser EC consistente, éste no lo es en el ejemplo, $\sim$S tampoco, y S, en consecuencia, es válido.

VI) $(\exists x)fx \vee (x)gx.\supset.(\exists x)(fx \vee gx)$ S

$\sim[\exists F \vee \sim \exists\sim G.\supset.\ \exists(F \vee G)]$ $\sim$S

Simplificando, etc. :

$$\exists F \vee \sim \exists \sim G . \sim \exists (F \vee G)$$

$$\sim \exists (F \vee G) .\ \exists F . \vee . \sim \exists (F \vee G) . \sim \exists \sim G \qquad \text{EC(vi)}$$

Analizando el primer componente, que pertenece a su vez a la forma(v),se aprecia que 'F' implica a 'F∨G' y por lo tanto es inconsistente.

El segundo, de la forma(iv),es también inconsistente,pues, luego de borrar los cuantificadores, '~(F∨G).~ ~G' es inconsistente.

Como ninguno entonces de los componentes de EC es consistente, ni EC ni ~S lo son, y S es válido.

4. El procedimiento QM es aplicable también a los que Quine titula "esquemas mixtos" (ibid. p. 172), esto es, "esquemas [cuantificacionales uniformes] con el añadido de letras setenciales o de enunciado" (ibid., p. 262). Debe entenderse que las letras proposicionales o, como se las denomina en el pasaje citado, letras sentenciales, no aparecen dentro de los operandos, es decir, que un esquema mixto se compone sólo de aquellas cuantificaciones que en el capítulo anterior se denominaron simples o básicas (véase III.1,supra), más letras proposicionales y conectivas (*).

La idea medular de QM sigue en pie: se trata de decidir si ~S es inconsistente, pero para ello es preciso ahora, antes de proceder a las transformaciones de rutina, reducir el esque

---

(*) Aunque podría parecerlo, no es posible considerar como letras proposicionales a los componentes constituídos por letras predicativas seguidas por constantes individuales, pues en tal caso la técnica indicada no puede impedir resultados inaceptables, como el del ejemplo V de la sección siguiente.

ma mixto S a otro básico, lo que se logra otorgando los valores '⊤' y '⊥' a las letras proposicionales y continuando con la técnica reductora descrita en Métodos, §§ 5 y 6. Dicha reducción llevará a una de tres posibilidades:

a) Se termina en ⊤ (∼S es c-válido y S, por tanto, no válido).
b) Se termina en ⊥ (∼S es c-inconsistente y S válido).
c) Se termina en uno o más esquemas cuantificacionales puros, esto es, sin letras proposicionales.

Como es obvio, la tercera alternativa obliga a someter a la técnica básica de QM a cada uno de los esquemas "puros" obtenidos. Tan pronto como uno de éstos resulte consistente "podemos detener el trabajo, pues ello nos basta para saber que el esquema mixto original [∼S] es consistente" (ibid., p. 172) y S no válido. Si y sólo si ninguno fuera consistente, S es válido.

De manera que, cuando se trate de esquemas mixtos, el proceso de decisión comprende tres etapas:

a) Contradicción de S.
b) Reducción de ∼S, que habrá de conducir a una decisión o a uno o varios "esquemas cuantificacionales puros".
c) En caso de no haberse obtenido una decisión, aplicación de QM a cada uno de los esquemas puros residuales.

5. Siguen algunos ejemplos aclaratorios.

I) ∼[(∃x)(fx.gx).p.∼(p.(x)fx)] (*) S

Negando S y substituyendo cuantificadores:

(∃x)(fx.gx).p.∼[p.∼(∃x)∼fx)] ∼S

(*) Este esquema y el del ejemplo siguiente aparecen en Métodos, § 32, como ilustraciones de esquemas mixtos.

Eliminando 'p':

$$\begin{array}{l|l} \exists(F.G).\top.\sim(\top.\sim\exists\sim F) & \exists(F.G).\bot.\sim(\bot.\sim\exists\sim F) \\ \exists(F.G).\sim\sim\exists\sim F & \quad\bot \\ \exists(F.G).\exists\sim F & \end{array}$$

El esquema puro obtenido se halla en forma canónica y pertenece al tipo (iii). $\sim S$ es entonces consistente y S inválido.

II) $\sim p.(\exists x)\sim fx.\vee.\sim(y)fy.\vee.(\exists x)\sim gx$ S

Negando S, substituyendo cuantificadores y borrando las variables:

$$\sim[\sim p.(\exists x)\sim fx.\vee.\sim(y)fy.\vee.(\exists x)\sim gx]$$
$$\sim[\sim p.\exists\sim F.\vee.\exists\sim F.\vee.\exists\sim G]$$
$$p\vee\sim\exists\sim F.\sim\exists\sim F.\sim\exists\sim G \qquad \sim S$$

Eliminando 'p':

$$\begin{array}{r|r} \top\vee\sim\exists\sim F.\sim\exists\sim F.\sim\exists\sim G & \bot\vee\sim\exists\sim F.\sim\exists\sim F.\sim\exists\sim G \\ \sim\exists\sim F.\sim\exists\sim G & \sim\exists\sim F.\sim\exists\sim F.\sim\exists\sim G \end{array}$$

Los dos esquemas puros se hallan en forma canónica y no queda otra cosa que someterlos a la prueba de consistencia:

a) '$\sim\exists\sim F.\sim\exists\sim G$' pertenece a la forma (iv) y es siempre consistente. Esto basta para saber que $\sim S$ es consistente y S inválido.

III) $p.\supset.q.(x)(fx\supset\sim gx):q\supset(\exists x)(fx.gx\vee hx):\supset.p\supset(\exists x)(hx.\sim gx)$ (*) S

Negando S, etc.:

$$\sim[p.\supset.q.\sim\exists\sim(F\supset\sim G):q\supset\exists(F.G\vee H):\supset.p\supset\exists(H.\sim G)]$$
$$p.\supset.q.\sim\exists\sim(F\supset\sim G):q\supset\exists(F.G\vee H):\sim[p\supset\exists(H.\sim G)]$$
$$p.\supset.q.\sim\exists\sim(F\supset\sim G):q\supset\exists(F.G\vee H):\quad p:\sim\exists(H.\sim G) \qquad \sim S$$

(*) Este esquema mixto aparece en Métodos, p. 171, donde se ilustra la manera de obtener su equivalente puro, dejando al lector la prueba de su consistencia.

Eliminando 'p' y 'q' (utilizando letras auxiliares en vez de cuantificaciones por razones de comodidad):

$$\begin{array}{l|l} \begin{array}{l} \top . \supset . q . \sim A : q \supset B : \top : \sim C \\ \quad q . \sim A . q \supset B . \sim C \\ \begin{array}{l|l} \top . \sim A . \top \supset B . \sim C & \bot . \sim A . \bot \supset B . \sim C \\ \sim A . B . \sim C & \quad \bot \end{array} \end{array} & \begin{array}{l} \bot . \supset . q . \sim A : q \supset B : \bot : \sim C \\ \qquad \bot \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

La expresión reducida de $\sim S$ es:

$$\sim \exists \sim (F \supset \sim G) . \exists (F . G \vee H) . \sim \exists (H . \sim G)$$

Normalizando y canonizando:

$$\sim \exists (F . G) . \exists (F . G . \vee . F . H) . \sim \exists (H , \sim G)$$

$$\sim \exists (F . G) . \exists (F . G) \vee \exists (F . H) . \sim \exists (H . \sim G)$$

$$\sim \exists (F . G) . \sim \exists (H . \sim G) . \exists (F . G) . \vee . \sim \exists (F . G) . \sim \exists (H . \sim G) . \exists (F . H) \qquad EC(vi)$$

El primer componente de EC, que pertenece a la forma (v), es inconsistente, pues 'F.G' implica a 'F.G.V.H.~G'. También es inconsistente el segundo componente, de la misma forma que el primero, pues 'F.H' implica a 'F.G.V.H.~G'. Por lo tanto $\sim S$ es inconsistente y S válido.

IV) $(\exists x)(fx . gx) . p . p \supset (\exists x) \sim fx . \equiv . (\exists x)(fx . gx) . (\exists x) \sim fx \qquad S$

Según Métodos, p. 168, S será válido si y sólo si lo son los dos condicionales siguientes:

a) $(\exists x)(fx . gx) . p . p \supset (\exists x) \sim fx . \supset . (\exists x)(fx . gx) . (\exists x) \sim fx \qquad S'$

b) $(\exists x)(fx . gx) . (\exists x) \sim fx . \supset . (\exists x)(fx . gx) . p . p \supset (\exists x) \sim fx \qquad S''$

Debe pues procederse a analizarlos por separado.

a) Negando S', etc.:

$$\sim [\exists (F . G) . p . p \supset \exists \sim F . \supset . \exists (F . G) . \exists \sim F] \qquad \sim S'$$

$$\exists (F . G) . p . p \supset \exists \sim F . \sim [\exists (F . G) . \exists \sim F]$$

$$\exists (F . G) . p . p \supset \exists \sim F . \sim \exists (F . G) \vee \sim \exists \sim F$$

Eliminando 'p' :

$\exists(F.G).\top.\top \supset \exists\sim F.\sim\exists(F.G) \vee \sim\exists\sim F$	$\exists(F.G).\bot.\bot \supset \exists\sim F.\sim\exists(F.G) \vee \sim\exists\sim F$
$\exists(F.G).\exists\sim F.\sim\exists(F.G) \vee \sim\exists\sim F$	$\bot$

Canonizando el esquema puro obtenido se llega a:

$$\exists(F.G).\exists\sim F.\sim\exists(F.G).\vee.\exists(F.G).\exists\sim F.\sim\exists\sim F$$

cuyos dos componentes son c-inconsistentes. $\sim$S' es entonces inconsistente y S' válido.

b) Negando S", etc.

$\sim[\exists(F.G).\exists\sim F. \supset .\exists(F.G).p.p \supset \exists\sim F]$ $\sim$S"

$\exists(F.G).\exists\sim F.\sim[\exists(F.G).p.p \supset \exists\sim F]$

$\exists(F.G).\exists \sim F.\sim\exists(F.G) \vee \sim p \vee \sim(p \supset \exists\sim F)$

$\exists(F.G).\exists \sim F.\sim\exists(F.G) \vee \sim p \vee (p.\sim\exists\sim F)$

Eliminando 'p' :

$\exists(F.G).\exists\sim F.\sim\exists(F.G) \vee \sim\top \vee (\top.\sim\exists\sim F)$	$\exists(F.G).\exists\sim F.\sim\exists(F.G) \vee \sim\bot \vee (\bot.\sim\exists\sim F)$
$\exists(F.G).\exists\sim F.\sim\exists(F.G) \vee \bot \vee \sim\exists\sim F$	$\exists(F.G).\exists\sim F.\sim\exists(F.G) \vee \top \vee \bot$
$\exists(F.G).\exists\sim F.\sim\exists(F.G) \vee \sim\exists\sim F$	$\exists(F.G).\exists\sim F$

Cada uno de estos dos esquemas puros debe ser probado para la consistencia.

bI) Canonizando el primero de ellos se llega a:

$$\exists(F.G).\exists\sim F.\sim\exists(F.G).\vee.\exists(F.G).\exists\sim F.\sim\exists\sim F$$

que es inconsistente, pues sus dos componentes son c-inconsistentes.

bII) El segundo se halla en forma canónica y es del tipo (iii), siempre consistente.

En resumen: $\sim$S" es consistente y S", por tanto, inválido, de manera que S no es válido.

V) $(x)(fx \supset gx).fa. \supset .ga$ (*) S

Negando S, etc. :

$$\sim[(x)(fx \supset gx).fa. \supset .ga]$$
$$\sim[\sim\exists\sim(F \supset G).fa. \supset .ga]$$
$$\sim\exists\sim(F \supset G).fa.\sim ga$$
$$\sim\exists(F.\sim G).fa.\sim ga \qquad \sim S$$

Eliminando 'fa' y 'ga' :

$\sim\exists(F.\sim G).\top.\sim ga$	$\sim\exists(F.\sim G).\bot.\sim ga$
$\sim\exists(F.\sim G).\sim ga$	$\bot$

$\sim\exists(F.\sim G).\sim\top$	$\sim\exists(F.\sim G).\sim\bot$
$\sim\exists(F.\sim G).\bot$	$\sim\exists(F.\sim G).\top$
$\bot$	$\sim\exists(F.\sim G)$

$\sim$S se ha reducido a '$\sim\exists(F.\sim G)$', esquema puro, en forma canónica (ii), siempre consistente. S, por lo tanto, no es válido, para QM. Su validez, sin embargo, es demostrable por cualquier otro procedimiento decisorio apropiado e, incluso, por cualquier razonamiento que tome en cuenta el significado del cuantificador universal. La inoperancia de QM en este caso debe atribuirse al hecho que la validez de S depende de la peculiar relación entre la cuantificación y los componentes en que aparecen constantes individuales. Al ser eliminados éstos, la antedicha relación no se halla presente en el esquema puro residual que, por lo tanto, no tiene por qué ser válido. Tal cosa no sucede cuando los componentes eliminados son letras proposicionales, como en los ejemplos anteriores, ya que no existe ninguna relación es-

(*) Este ejemplo no tiene otro objeto que mostrar cómo existen esquemas no básicos, no considerados tales en Métodos, que QM no puede resolver satisfactoriamente. Véase sección 4, supra.

tructural entre letras proposicionales y cuantificaciones.

6. Los esquemas considerados hasta aquí han sido esquemas uniformes o mixtos. Existen, sin embargo, ciertos esquemas monádicos con otra estructura y a éstos llama Quine "esquemas monádicos atípicos"("non-standard monadic schemata")(*)."En los esquemas monádicos atípicos las cuantificaciones son frecuentemente impuras en el sentido siguiente: el alcance del cuantificador es una función veritativa algunos de cuyos componentes no muestran instancias libres de la variable cuantificada" (**). En otras palabras: para que un esquema monádico sea atípico deberá poseer por lo menos una cuantificación dentro de cuyo operando aparezca una letra proposicional y/o una variable que no es la de cuantificación y/o una cuantificación pura o no. Ejemplos de estos esquemas atípicos son los siguientes: $(x)(fx \supset p)$, $(\exists x)(fy \supset gx)$, $(x)[fx \supset (\exists y)(fy.{\sim}gy)]$, $(x)(p. \supset .fy \supset gx)$.

La aplicación de QM a un esquema atípico S requiere como paso previo la eliminación, en dicho esquema, de la o las cuantificaciones impuras, o, más precisamente, se debe transformar S en un esquema equivalente S' que sea típico, esto es, uniforme o mixto. Esta transformación se lleva a efecto mediante una técnica descrita por Quine en Métodos, pp. 263-65, que no es otra que la introducida por H. Behmann (+) para, como escriben Hilbert y Bernays, "jede Formel des einstelligen Prädikatenkalküls in eine solche aus Primärformeln zusammengesetzte Formel über-

(*) Métodos, p. 263.
(**) Loc. cit.. Como se ve, no se incluyen entre las "impurezas" a las fórmulas elementales compuestas de una letra predicativa seguida por una constante individual. Cuando un esquema monádico exhibe una fórmula de esa especie, QM, lo mismo que QS y QL, no garantiza la corrección del resultado. Véase 5, supra, ejemplo V.
(+) Algebra der Logik, pp. 189-91.

führen oder, wie wir kurz sagen wollen, 'in Primärformeln zerlegen' " (*).

Dicha técnica, tal como aparece en Métodos, consiste en substituir primero todos los cuantificadores universales por cuantificadores existenciales, de acuerdo a conocidas reglas, y en eliminar, acto seguido, las conectivas que no sean ".", "v" y "~" de los operandos de las cuantificaciones existenciales impuras que no contengan como parte alguna otra cuantificación impura, transformando luego la expresión obtenida "de tal modo que las impurezas quedan sujetas sólo a disyunción o sólo a conjunción o a una conjunción que se encuentra bajo disyunción" (**). Luego, mediante la distribución de los cuantificadores y la aplicación de las reglas de confinamiento, es fácil deshacerse de las impurezas. "Aplicado a cualquier cuantificación existencial impura que no contenga a su vez otra cuantificación impura, es claro que este procedimiento convertirá la cuantificación impura en un esquema en el cual todas las cuantificaciones serán puras" (+). Este proceder se repite "hacia afuera hasta conseguir que no quede ninguna cuantificación impura en el esquema" (++).

"Finalmente, reliteralizando las variables diversas de 'x' para que todas sean 'x', obtenemos un esquema monádico típico" (*+). Como éste habrá de ser forzosamente uniforme o mixto, no resta ya sino proceder a resolverlo de acuerdo a las reglas usuales.

(*) Hilbert-Bernays, Grundlagen I, p. 146.
(**) Métodos, p. 264.
(+) Ibid., p. 265.
(++) Loc. cit.
(*+) Loc. cit.

7. He aquí algunos ejemplos:

I) $(x)(fx.p). \supset .(\exists x)(gx. \supset .fx.p)$ S

Hallando primero el esquema mixto equivalente:

$\sim(\exists x)\sim(fx.p). \supset .(\exists x)(gx. \supset .fx.p)$

$\sim(\exists x)(\sim fx \vee \sim p). \supset .(\exists x)(\sim gx. \vee .fx.p)$

$(\exists x)(\sim fx \vee \sim p) \vee (\exists x)(\sim gx. \vee .fx.p)$

$(\exists x) \sim fx \vee \sim p \vee (\exists x)\sim gx \vee (\exists x)(fx.p)$

$(\exists x) \sim fx. \vee .\sim p. \vee .(\exists x)\sim gx. \vee .(\exists x)fx.p$

Negando la expresión para obtener $\sim S$ y eliminando luego 'p' y 'q' :

$\sim(\exists x)\sim fx.p.\sim(\exists x)\sim gx.\sim[(\exists x)fx.p]$ $\sim S$

$\sim(\exists x)\sim fx.\top.\sim(\exists x)\sim gx.\sim[(\exists x)fx.\top]$	$\sim(\exists x)\sim fx.\bot.\sim(\exists x)\sim gx.\sim[(\exists x)fx.\bot]$
$\sim(\exists x)\sim fx.\sim(\exists x)\sim gx.\sim(\exists x)fx$	$\bot$

La reducida de $\sim S$, es decir, su esquema básico equivalente, ya está en forma canónica.

$\sim\exists\sim F.\sim\exists\sim G.\sim \exists F$ EC(iv)

Borrando los cuantificadores se aprecia que EC es inconsiste. $\sim S$ también lo es y S resulta ser válido.

II) $(x)(y)(\exists z)(fx \supset gz. \supset .fx \supset gy)$ S

Obteniendo el esquema puro correspondiente:

$\sim(\exists x)\sim\sim(\exists y)\sim(\exists z)[\sim(fx \supset gz). \vee .fx \supset gy]$

$\sim(\exists x)(\exists y)\sim(\exists z)[fx.\sim gz. \vee .\sim fx. \vee .gy]$

$\sim(\exists x)(\exists y)\sim[fx.\exists\sim gz. \vee .\sim fx. \vee .gy]$

$\sim(\exists x)(\exists y)[\sim fx \vee \sim(\exists z)\sim gz.fx.\sim gy]$

$\sim(\exists x)[\sim fx \vee \sim(\exists z)\sim gz.fx.(\exists y)\sim gy]$

$\sim(\exists x)\{[\sim fx.fx. \vee .\sim(\exists z)\sim gz.fx].(\exists y)\sim gy\}$

$\sim(\exists x)[\sim(\exists z)\sim gz.fx.(\exists y)\sim gy]$

$\sim[\sim(\exists z)\sim gz.(\exists x)fx.(\exists y)\sim gy]$

$\sim[\sim\exists\sim G . \exists F . \exists\sim G]$

$\sim\exists\sim G . \exists F . \exists\sim G$ $\sim S$

$\sim S$ se halla ya en forma canónica y pertenece a la forma(v). 'F' no implica a '$\sim G$', pero '$\sim G$' sí implica a '$\sim G$'. De modo que $\sim S$ es inconsistente y S es válido.

III) $$(\exists x)(y)(fy \vee gx.hx) \qquad S$$

Hallando el esquema puro equivalente:

$$(\exists x)\sim(\exists y)\sim(fy \vee gx.hx)$$
$$(\exists x)\sim(\exists y)[\sim(fy \vee gx) \vee \sim hx]$$
$$(\exists x)\sim(\exists y)(\sim fy.\sim gx. \vee .\sim hx)$$
$$(\exists x)\sim[(\exists y)\sim fy.\sim gx. \vee .\sim hx]$$
$$(\exists x)\{\sim[(\exists y)\sim fy.\sim gx].hx\}$$
$$(\exists x)[\sim(\exists y)\sim fy \vee gx.hx]$$
$$(\exists x)[\sim(\exists y)\sim fy.hx. \vee .gx.hx]$$
$$(\exists x)[\sim(\exists y)\sim fy.hx] \vee (\exists x)(gx.hx)$$
$$\sim(\exists y)\sim fy.(\exists x)hx. \vee .(\exists x)(gx.hx)$$

Negando la expresión y borrando las variables:

$$\sim[\sim\exists\sim F.\exists H. \vee .\exists(G.H)] \qquad \sim S$$

Simplificando y canonizando $\sim S$:

$$\sim(\sim\exists\sim F.\exists H).\sim\exists(G.H)$$
$$\exists\sim F \vee \sim\exists H.\sim\exists(G.H)$$
$$\exists\sim F.\sim\exists(G.H). \vee .\sim\exists H.\sim\exists(G.H) \qquad EC(vi)$$

El primer componente, de la forma(v), es consistente pues '$\sim F$' no implica a 'G.H'. Por lo tanto EC y $\sim S$ son consistentes y S no es válido.

IV) $$(y)[(\exists x)(fx \supset gy). \supset .(z)(\exists x)(fx \supset gz)] \; (*) \qquad S$$

Obteniendo el esquema puro equivalente:

(*) De Copi, Symbolic Logic, p. 105, ej. d.

$$\sim(\exists y)\sim[(\exists x)(fx \supset gy) . \supset . \sim(\exists z)\sim(\exists x)(fx \supset gz)]$$
$$\sim(\exists y)[(\exists x)(fx \supset gy) . (\exists z)\sim(\exists x)(\sim fx \vee gz)]$$
$$\sim(\exists y)[(\exists x)(\sim fx \vee gy) . (\exists z)\sim\{(\exists x)\sim fx \vee gz\}]$$
$$\sim(\exists y)[(\exists x)(\sim fx \vee gy) . (\exists z)\{\sim(\exists x)\sim fx . \sim gz\}]$$
$$\sim(\exists y)[(\exists x)\sim fx \vee gy . \sim(\exists x)\sim fx . (\exists z)\sim gz]$$
$$\sim[(\exists y)\{(\exists x)\sim fx \vee gy\} . \sim(\exists x)\sim fx . (\exists z)\sim gz]$$
$$\sim[(\exists x)\sim fx \vee (\exists y)gy . \sim(\exists x)\sim fx . (\exists z)\sim gz]$$

Negando la expresión hallada y borrando las variables:

$$\exists\sim F \vee \exists G . \sim\exists\sim F . \exists\sim G$$

Canonizando:

$$\exists\sim F . \sim\exists\sim F . \exists\sim G . \vee . \exists G . \sim\exists . \sim F . \exists\sim G \qquad \text{EC(vi)}$$

El primer componente, que es de la forma (v), es inconsistente, pues '$\sim F$' implica a '$\sim F \vee \sim G$', pero el segundo, que ostenta la misma forma, no lo es, pues ni 'G' ni '$\sim G$' implican a '$\sim F$'. Por lo tanto $\sim S$ es consistente y S inválido.

V) $$(y)(x)(fx . gy . \supset . fx \vee p) \qquad S$$

Hallando el esquema mixto equivalente:

$$\sim(\exists y)\sim\sim(\exists x)\sim(fx . gy . \supset . fx \vee p)$$
$$\sim(\exists y)(\exists x)[fx . gy . \sim(fx \vee p)]$$
$$\sim(\exists y)(\exists x)(fx . gy . \sim fx . \sim p)$$
$$\sim(\exists y)[(\exists x)(fx . \sim fx) . gy . \sim p]$$
$$\sim[(\exists x)(fx . \sim fx) . (\exists y)gy . \sim p]$$

Negando S y eliminando '$\exists(F . \sim F)$' :

$$\exists(F . \sim F) . \exists G . \sim p$$
$$\perp . \exists G . \sim p$$
$$\perp$$

No es necesario proseguir: $\sim S$ es inconsistente y S válido.

VI) $$(y)[(x)(fx . fy . \supset . gx) . p . (x)fx . \supset . gy] \quad (*) \qquad S$$

(*) De Quine, Logic, p. 5.

Hallando la forma mixta equivalente:

$$\sim(\exists y)\sim[\sim(\exists x)\sim(fx.fy. \supset .gx).p.\sim(\exists x)\sim fx. \supset .gy]$$
$$\sim(\exists y)[\sim(\exists x)(fx.fy.\sim gx).p.\sim(\exists x)\sim fx.\sim gy]$$
$$\sim(\exists y)[\sim[(\exists x)(fx.\sim gx).fy].p.\sim(\exists x)\sim fx.\sim gy]$$
$$\sim(\exists y)[\sim(\exists x)(fx.\sim gx) \vee \sim fy.p.\sim(\exists x)\sim fx.\sim gy]$$
$$\sim\{(\exists y)[\sim(\exists x)(fx.\sim gx)\vee \sim fy.\sim gy].p.\sim(\exists x).\sim fx\}$$
$$\sim\{(\exists y)[\sim(\exists x)(fx.\sim gx).\sim gy. \vee .\sim fy.\sim gy].p.\sim(\exists x)\sim fx\}$$
$$\sim\{(\exists y)[\sim(\exists x)(fx.\sim gx).\sim gy] \vee (\exists y)(\sim fy.\sim gy).p.\sim(\exists x)\sim fx\}$$
$$\sim\{[\sim(\exists x)(fx.\sim gx).(\exists y)\sim gy] \vee (\exists y)(\sim fy.\sim gy).p.\sim(\exists x)\sim fx\}$$

Negando la forma mixta obtenida para alcanzar $\sim S$, y borrando las variables:

$$[\sim\exists(F.\sim G).\exists\sim G]\vee \exists(\sim F.\sim G).p.\sim\exists\sim F \qquad \sim S$$

Eliminando 'p' :

$$\begin{array}{l|l} [\sim\exists(F.\sim G).\exists\sim G]\vee \exists(\sim F.\sim G).\top.\sim\exists\sim F & [\sim\exists(F.\sim G).\exists\sim G]\vee \exists(\sim F.\sim G).\bot.\sim\exists\sim F \\ [\sim\exists(F.\sim G).\exists\sim G]\vee \exists(\sim F.\sim G).\sim\exists\sim F & \qquad\qquad\qquad\bot \end{array}$$

Hallando la forma canónica de la reducida de $\sim S$:

$$\sim\exists(F.\sim G).\exists\sim G.\sim\exists\sim F. \vee .\exists(\sim F.\sim G).\sim\exists\sim F \qquad EC(vi)$$

El primer componente, que pertenece a la forma(v), es inconsistente, pues '$\sim G$' implica a la disyunción '$F.\sim G. \vee .\sim F$' y el segundo, de la misma forma, también lo es, ya que '$\sim F.\sim G$' implica a '$\sim F$'. Por lo tanto $\sim S$ es inconsistente y S válido.

8. Al igual que en los capítulos anteriores se resumen en esta sección las observaciones y comentarios que QM promueve.

a) Si bien, como se dijo a propósito de los procedimientos ya estudiados, las fórmulas con constantes individuales no constituyen propiamente fórmulas para Quine, el análisis de las inferencias en las que intervienen proposiciones singulares hace inevitable su uso. QM, al igual que QS y QL, es incapaz de garantizar decisiones siempre correctas para fórmulas de esta especie.

b) Debe convenirse en que QM es un procedimiento realmente ingenioso que supera, no sólo en elegancia sino también en eficacia práctica, a los otros métodos concebidos por Quine. Incluso su relativa laboriosidad puede aminorar en ciertos casos y el mismo Quine advierte que "para disminuir el trabajo .... puede variar la práctica de varios modos" (Métodos, p. 159), los mismos que describe en seguida, a pesar de los obvios que son. No es entonces por su excesiva operosidad que QM es objetable.

c) Lo más saltante y enfadoso para aquél que trata de adentrarse en las instrucciones que componen QM es la proliferación incesante de alternativas que se van presentando conforme se avanza hacia el final, y a esto se suma que la elección entre ellas obedece a diversos criterios por el hecho de existir metas parciales muy diversas en cada etapa del proceso y aun dentro de cada una de éstas. Es el caso, por ejemplo, de un esquema canónico de la forma (vi), uno de cuyos componentes sea de la forma (iv) y otro de la forma (v): habrá necesidad de construir, para el primero, uno o más condicionales cuya c-validez o c-invalidez ha de establecerse, y para el segundo una conjunción de esquemas de la que se precisa saber, no ya su c-validez o c-invalidez, sino su c-consistencia o c-inconsistencia.

Cuando los esquemas son mixtos o atípicos, la cosa se complica (véase el ejemplo IV de 5, supra), debiendo emplearse inevitablemente técnicas adicionales, y no es poco común llegar a más de un esquema puro. Constituye pues la exuberante frondosidad o "ramificación" de QM su más distintiva característica (e incomodidad).

d) Tantas variaciones y cambios de rumbo en la secuela del proceso, tantas decisiones que tomar ante alternativas de muy diversa especie, todo ello no puede ser considerado sino como el lado débil de QM. Y no es que se confiera indebida preponderancia a razones puramente estéticas: las múltiples y variadas decisiones por tomar y la falta de un enlace orgánico *visible* entre ellas ofrecen campo singularmente propicio para la desorientación y el extravío del poco experimentado.

e) Desde la transformación inicial de la prueba de validez en otra de consistencia, por lo demás teóricamente irreprochable, se empieza a percibir el aire de afectación y excesiva industria que se advierte luego en las demás fases de QM, con el consiguiente desmedro de su brillantez. Ello no obstante, y pese a los inconvenientes anotados, no del todo veniales, QM es sin disputa el mejor de los procedimientos decisorios para fórmulas monádicas de primer grado que Quine ha publicado, superando con creces a QS y a QL. El hecho mismo y las circunstancias de su concepción pueden significar, entre otras cosas, que su propio autor comparte este sentir.

C A P I T U L O   V

El procedimiento de Von Wright

1. Otro procedimiento decisorio para fórmulas monádicas de primer grado es el debido al profesor finlandés Georg Henrik Von Wright, que aparece en su monografía "On the Idea of Logical Truth (I)", publicada originalmente en Societas Scientiarum Fennica, Commentationes Physico-Mathematicae XIV, 4 (Helsinki, 1948), e incluída luego, sin modificaciones, en el volumen "Logical Studies" (pp. 22-43) del mismo autor (*). Las citas que se hagan en lo sucesivo se referirán a esta última edición.

"Essentially the same as that of Quine in XII, 6" (**), es decir, esencialmente el mismo que QS, el procedimiento VW, como será denominado abreviadamente en este trabajo, permite decidir acerca de la validez de "any formula of the lower functional calculus of symbolic Logic, which contains only one-place predicate and no sentence variable and no free individual variable"(+). Todo el procedimiento, expuesto con estilo y terminología sumamente personales, se funda en la interesante distinción que efectúa el autor entre "presence functions" y "existence functions", la cual permite reducir, como en QS, la cuestión de la validez a otra de c-validez. La escueta descripción que sigue tendrá por fuerza que pasar por alto dichos fundamentos, se limitará únicamente a las técnicas pertinentes, y empleará la terminología original sólo cuando sea menester, no reflejando de esta manera la presentación propia del original (++).

(*) London, Routledge and Kegan Paul, 1957.
(**) Church, Review, p. 59. El propio Quine escribe: "Von Wright (1949) ofrece una lúcida exposición con el mismo principio básico usado por mí en O Sentido." (Métodos, p. 170, n.1).
(+) Logical Studies, p. 43.
(++) A modo de complemento de la monografía citada es digno de mención el artículo "Form and Content in Logic" del mismo autor, incluído también en Logical Studies, pp. 1-21.

Conviene advertir que la notación utilizada por Von Wright (que se adoptará en este capítulo) suprime las variables individuales y usa 'U' y 'E' en vez de '(x)' y '(∃x)', respectivamente, de manera que la fórmula '(∃x)(fx.gx)' aparece escrita como 'E(P.Q)' y '(x)(fx⊃gx)' como 'U(P⊃Q)'. 'P', 'Q', etc., son para Von Wright nombres de propiedades ("names of properties"), y las expresiones que resultan de reemplazar las letras proposicionales de una truth-function por n nombres de propiedades son a su vez complejos moleculares de n nombres de propiedades ("molecular complex de n names of properties") (*)."Nombre de propiedad" se entenderá de aquí en adelante, y prescindiendo de cualquier diferencia de concepción, como sinónimo de "fórmula predicativa elemental" (**), y sus complejos moleculares como truth-functions de estas fórmulas elementales.

Además, donde no afecte la confección de tablas, y sólo por razones de comodidad, la notación original del autor será simplificada, suprimiéndose el punto en las conjunciones que forman parte de un operando en forma normal disyuntiva perfecta (+), eliminándose el punto y el paréntesis cuando el operando sea una conjunción, y substituyéndose '∼' por una barra trazada sobre el nombre de propiedad negado. Así se escribirán, por ejemplo, '$EP\bar{Q}$' en vez de 'E(P.∼Q)', '$\sim EP\bar{Q}R$' por '∼E(P.∼Q.R)' y '$E(P\bar{Q}R \vee P\bar{Q}\bar{R} \vee \bar{P}Q\bar{R} \vee \bar{P}\bar{Q}\bar{R})$' en lugar de 'E(P.∼Q.R.∨.P.∼Q.∼R.∨.∼P.Q.∼R.∨.∼P.∼Q.∼R)'.

2. Sea S una fórmula monádica de primer grado que carece de letras proposicionales y variables libres. VW prescribe, para decidir sobre su validez o invalidez, que se proceda de la manera siguiente:

(*) Ibid., pp. 30-31.
(**) Aunque por brevedad se las denominará "letras predicativas".
(+) Véase la sección 2, infra.

a) Reemplácense por E-cuantificadores, de acuerdo a conocidas reglas, los U-cuantificadores que S exhibe.

b) Hállese la forma normal disyuntiva perfecta de los operandos de las E-cuantificaciones ("E-sentences") de S en términos de todas las letras predicativas ("names of properties") que ocurren en S. Cada conjunción de la FNDP obtenida se denomina componente existencial ("existence constituent") de una fórmula básica con n letras predicativas, y, de manera similar, cada componente existencial, una vez E-cuantificado, es llamado E-componente ("E-constituent") de la respectiva E-cuantificación(*).

c) Constrúyase una tabla de valores ("existence-table")para cada E-cuantificación de S "on the basis of all posible combinations of truth-values in the E-constituents"(**).

d) Constrúyase, por último, una tabla de valores para S "on the basis of the combinations of truth-values in the E-sentences", es decir, en las E-cuantificaciones, cuidando de no repetir los arreglos que sean idénticos(+).

e) La fórmula S será "logically true" cuando S "expresses the tautology of the propositions expressed by its E-constituents"(++).

Sea S, por ejemplo, la fórmula

(*) Op. cit., p. 36. Se trata, en otras palabras, de transformar el operando de cada E-cuantificación en la disyunción de diferentes conjunciones, cada una de las cuales habrá de exhibir las n propiedades de S, negadas o no, y sin que en ninguna de ellas aparezcan dos componentes idénticos o dos contradictorios.

Así, por ejemplo, '$P\bar{Q}R \vee PQ\bar{R} \vee \bar{P}\bar{Q}\bar{R}$' es un operando que se halla en FNDP; '$P\bar{Q}R$', '$PQ\bar{R}$' y '$\bar{P}\bar{Q}\bar{R}$' son sus componentes existenciales; y '$EP\bar{Q}R$','$EPQ\bar{R}$' y '$E\bar{P}\bar{Q}\bar{R}$' los E-componentes de '$E(P\bar{Q}R \vee PQ\bar{R} \vee \bar{P}\bar{Q}\bar{R})$'.

(**) Ibid., p. 39.

(+) Ibid., p. 40.

(++) Ibid., p. 41.

$$U(P \supset Q) . U(R \supset P) . \supset . U(R \supset Q) .$$

a) Reemplazando cuantificadores se obtiene

$$\sim E \sim (P \supset Q) . \sim E \sim (R \supset P) . \supset . \sim E \sim (R \supset Q) . \qquad S'$$

b) Debe hallarse ahora la FNDP, en términos de 'P', 'Q' y 'R', de cada uno de los operandos que aparecen en S'. Von Wright no señala el procedimiento a seguir y se limita a decir al respecto: "Be it remarked that the perfect disjunctive normal form of a molecular complex can be directly 'read off' from its truth table" (*). Puede utilizarse, sin embargo, una técnica tabular basada en la teoría de las expansiones booleanas (a la que crípticamente parece hacerse alusión en el citado pasaje de Von Wright), que incluye las siguientes operaciones:

i) Reemplazo de cada operando A por una fórmula de la forma '$A \vee (\alpha_1 . \sim\alpha_1) \vee (\alpha_2 . \sim\alpha_2) \vee ......$', donde cada '$\alpha_i$' representa una de las propiedades o letras predicativas de S que faltan en A. Los operandos de S' quedan así convertidos en $\sim(P \supset Q) \vee (R . \sim R)$, $\sim(R \supset P) \vee (Q . \sim Q)$ y $\sim(R \supset Q) \vee (P . \sim P)$.

ii) Evaluación tabular de cada uno de estos operandos transformados. La del primer operando de S' es

P	Q	R	$\sim(P$	$\supset$	$Q)$ $\vee$	$(R . \sim R)$
V	V	V	F	V	F	F
V	V	F	F	V	F	F
V	F	V	V	F	V	F
V	F	F	V	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	V	F	F	V	F	F
F	F	V	F	V	F	F
F	F	F	F	V	F	F

(*) Ibid., p. 28.

iii) Construcción de tantas conjunciones cuantos arreglos verdaderos aparezcan en la respectiva tabla de cada operando, debiendo exhibir cada una de ellas todas las propiedades una sola vez, negadas o no, según se hallen F- o V-asignadas, respectivamente, en el correspondiente arreglo. La disyunción de estas conjunciones es la FNDP que se busca, y, de acuerdo a la terminología de Von Wright, cada conjunción será un componente existencial de dicha forma normal.

Se tiene entonces que la FNDP de '$\sim(P \supset Q)$', en términos de 'P', 'Q' y 'R', es

$$(P\bar{Q}R \vee P\bar{Q}\bar{R}) \ ,$$

y '$E\sim(P \supset Q)$' queda convertido en '$E(P\bar{Q}R \vee P\bar{Q}\bar{R})$', cuyos E-componentes son '$EP\bar{Q}R$ y '$EP\bar{Q}\bar{R}$'.

'$E\sim(R \supset P)$' y '$E\sim(R \supset Q)$' se convierten, del mismo modo, en $E(\bar{P}QR \vee \bar{P}\bar{Q}R)$ y $E(P\bar{Q}R \vee \bar{P}\bar{Q}R)$, respectivamente.

c) Debe confeccionarse ahora una tabla para cada E-cuantificación de S', cuyas líneas o arreglos estarán constituídas por todas las combinaciones de V y F que pueden asumir los E-componentes de dicha E-cuantificación (*). Siguiendo con el ejemplo, se tiene:

$E\,P\bar{Q}R$	$E\,P\bar{Q}\bar{R}$	$E\,\bar{P}QR$	$E\,\bar{P}\bar{Q}R$	$E\sim(P \supset Q)$	$E\sim(R \supset P)$	$E\sim(R \supset Q)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	F	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	V	F	F	V	F	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V
V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V	F
F	V	F	V	V	V	V
F	V	F	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	F	V	F
F	F	F	V	F	V	V
F	F	F	F	F	F	F

(*) Es conveniente, por comodidad, refundir en una sola todas las tablas requeridas, y así se procederá en lo sucesivo.

La razón de ser de los valores asignados a las E-cuantificaciones se hará patente con sólo analizar el cuarto arreglo. El valor V de '$E\sim(P\supset Q)$' se ha obtenido sabiendo que, en términos de E-componentes, equivale a '$E\ P\bar{Q}R \vee E\ P\bar{Q}\bar{R}$', cuyo valor, en este arreglo, es el de $V \vee V$. '$E\sim(R\supset P)$' equivale a '$E\ \bar{P}QR \vee E\ \bar{P}\bar{Q}R$', y su valor es el de $F \vee F$, esto es, F. El equivalente de '$E\sim(R\supset Q)$' es, igualmente, '$E\ P\bar{Q}R \vee E\ \bar{P}\bar{Q}R$', y su valor, por ello. el de $V \vee F$, es decir, V. Los demás arreglos se resuelven en forma similar.

d) Resta finalmente construir una tabla de valores para S', cuyas E-cuantificaciones asumirán todos los posibles valores que les ha asignado la tabla anterior. En esta última y definitiva tabla no han de repetirse, como es obvio, arreglos que resulten de idéntico valor. La tabla final, entonces, para la fórmula que estamos sometiendo a VW, es

$E\sim(P\supset Q)$	$E\sim(R\supset P)$	$E\sim(R\supset P)$	$\sim E\sim(P\supset Q).$	$\sim E\sim(R\supset P).$	$\supset$	$.\sim E\sim(R\supset Q)$
V	V	V	F	FF	V	F
V	F	V	F	FV	V	F
V	V	F	F	FF	V	V
V	F	F	F	FV	V	V
F	V	V	V	FF	V	F
F	V	F	V	FF	V	V
F	F	F	V	VV	V	V .

S' ha resultado tautológica y, por tanto, "logically true" o válida. También lo será entonces S, a la cual equivale.

3. Del mismo modo que cuando se estudiaron los procedimientos anteriores, se van a resolver algunos ejemplos más, sumamente sencillos.

I) $$E\ P\ .\ E\ Q.\ \supset .E(P.Q) \qquad S$$

Hallando la FNDP de cada operando:

1)

PQ	$P \vee (Q . \sim Q)$
VV	V F
VF	V F
FV	F F
FF	F F

$E(PQ \vee P\bar{Q})$

2)

PQ	$Q \vee (P . \sim P)$
VV	V F
VF	F F
FV	V F
FF	F F

$E(PQ \vee \bar{P}Q)$

3)

PQ	$P . Q$
VV	V
VF	F
FV	F
FF	F

E PQ

Construyendo la tabla de valores para los E-componentes de S:

E PQ	$E\ P\bar{Q}$	$E\ \bar{P}Q$	E P	E Q	E(P.Q)
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	F	V	F
E	F	F	F	F	F

Confeccionando la tabla para S:

E P	E Q	E(P.Q)	$E\ P\ .\ E\ Q .\supset . E(P.Q)$	
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	F	F	V
F	V	F	F	V
F	F	F	F	V

Como S no expresa la tautología de las proposiciones expresadas por sus E-componentes, S no es válida.

II) $E\,P\,.\,E\,Q\,.\,U(P \supset \sim Q).U(Q \supset R).\supset.E(R.\sim P)$ S (*)

Substituyendo cuantificadores:

$$E\,P\,.\,E\,Q.\sim E\sim(P \supset \sim Q).\sim E\sim(Q \supset R).\supset.E(R.\sim P) \qquad S'$$

Hallando las FNDP de todos los E-operandos de S':

1)

P	Q	R	$P \vee (Q.\sim Q) \vee (R.\sim R)$
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	V
V	F	F	V
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	F

$E(PQR \vee PQ\bar{R} \vee P\bar{Q}R \vee P\bar{Q}\bar{R})$

2)

P	Q	R	$Q \vee (P.\sim P) \vee (R.\sim R)$
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	F
F	V	V	V
F	V	F	V
F	F	V	F
F	F	F	F

$E(PQR \vee PQ\bar{R} \vee \bar{P}QR \vee \bar{P}Q\bar{R})$

3)

P	Q	R	$\sim$	$(P$	$\supset$	$\sim Q)$	$\vee\ (R.\sim R)$
V	V	V	V	V	F	F	V
V	V	F	V	V	F	F	V
V	F	V	F	V	V	V	F
V	F	F	F	V	V	V	F
F	V	V	F	F	V	F	F
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	V	V	F
F	F	F	F	F	V	V	F

$E(PQR \vee PQ\bar{R})$

(*) Modo Fesapo, con condición existencial, en la versión de Von Wright (op. cit., p. 42).

4)

P	Q	R	~(Q	⊃ R)	∨ (P.~P)
V	V	V	F	V	F
V	V	F	V	F	V
V	F	V	F	V	F
V	F	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F
F	V	F	V	F	V
F	F	V	F	V	F
F	F	F	F	V	F

$E(PQ\bar{R} \vee \bar{P}Q\bar{R})$

5)

P	Q	R	(R.~P)	∨ (Q.~Q)
V	V	V	FF	F
V	V	F	FF	F
V	F	V	FF	F
V	F	F	FF	F
F	V	V	VV	V
F	V	F	FV	F
F	F	V	VV	V
F	F	F	FV	F

$E(\bar{P}QR \vee \bar{P}\bar{Q}R)$

Queda ahora por construir una tabla con $2^7 = 128$ arreglos para los E-componentes de S, cuyo encabezamiento es

EPQR	$EPQ\bar{R}$	$EP\bar{Q}R$	$EP\bar{Q}\bar{R}$	$E\bar{P}QR$	$E\bar{P}Q\bar{R}$	$E\bar{P}\bar{Q}R$	E P	E Q	E~(P ⊃ ~Q)	E~(Q ⊃ R)	E(R.~P)

y efectuar luego la tabla final para S'. Si y sólo si todos los arreglos de esta última tabla son V, S', y por lo mismo S, son válidos (*).

III) U P ⊃ E P S

Reemplazando cuantificadores:

~E~P ⊃ E P S'

Los respectivos operandos se encuentran en FNDP, de modo que

(*) Más sobre este ejemplo en la sección 4, infra.

deben efectuarse inmediatamente las tablas de valores de las E-cuantificaciones de S', que son

$E\,P$	$E{\sim}P$	$E\,P$	$E{\sim}P$
V	V	V	V
V	F	V	F
F	V	F	V
F	F	F	F

.

La tabla de valores de S' es

$E\,P$	$E{\sim}P$	${\sim}E{\sim}P$	$\supset E\,P$
V	V	F	V
V	F	V	V
F	V	F	V
F	F	V	F

y como aparece en ella un arreglo falso, S no es válida.

IV) $E(P \vee {\sim}P) \supset (U\,P \supset E\,P)$ S

Reemplazando cuantificadores:

$E(P \vee {\sim}P) \supset ({\sim}E{\sim}P \supset E\,P)$ S'

Los tres E-componentes tienen sus operandos en FNDP, y como en función de sus E-componentes '$E(P \vee {\sim}P)$' equivale a '$EP \vee E{\sim}P$', la tabla correspondiente es

$E\,P$	$E{\sim}P$	$E(P \vee {\sim}P)$	$E\,P$	$E{\sim}P$
V	V	V	V	V
V	F	V	V	F
F	V	V	F	V
F	F	F	F	F

.

Evaluando ahora S:

$E(P \vee {\sim}P)$	$E\,P$	$E{\sim}P$	$E(P \vee {\sim}P) \supset$	$({\sim}E{\sim}P$	$\supset E\,P)$
V	V	V	V	F	V
V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	F

S es válida.

4. Una consideración detenida de los ejemplos que acaban de servir para ilustrar la aplicación de VW obliga a ciertas reflexiones sobre la idea que sirve de soporte a dicho procedimiento y sobre la posibilidad anexa de condensar en una sola sus reglas (c) y (d).

El profesor finlandés ha tratado exitosamente de reducir el problema de la validez cuantificacional al de la de la c-validez, y éste es el criterio que informa todas las reglas que forman parte de su procedimiento, que se reduce a la postre a la evaluación tabular de una fórmula monádica S en función de determinados E-componentes, elementos éstos de una clase de fórmulas de estructura característica o típica, similares a aquellos "cuantificativos típicos" de que se trató en la sección II.3, supra, a propósito de QS. Ahora bien: la tabla final de S es, en el fondo, la misma tabla de otra fórmula S_1 equivalente, que bien vale la pena denominar <u>forma normal de S</u>, obtenida mediante la substitución de todas las E-cuantificaciones de S por disyunciones equivalentes que exhiben exclusivamente los E-componentes (o cuantificativos típicos) originados al distribuir el E-cuantificador sobre la disyunción que exhiben las FNDP de los respectivos operandos. Como S_1 equivale a S, la validez de aquélla será condición suficiente y necesaria para la de ésta.

Llama así la atención que Von Wright no haya reunido las reglas (c) y (d), reduciendo las dos tablas que prescriben a una sola tabla decisoria para S_1 (fórmula alcanzable de la manera que se dijo), pues basta distribuir los E-cuantificadores, una vez substituídos los operandos de las E-cuantificaciones de S por sus FNDP, y proceder a efectuar la tabla de valores de la fórmula resultante, para conseguir una decisión acerca de S (*).

(*) Tal vez Von Wright haya pensado que mediante dos tablas se puede disminuir, como en efecto se disminuye, el número de líneas de la segunda al prescindirse en ella de todas las que, en la primera, resulten redundantes; pero el empleo de una sola, recurriendo si se desea a letras proposicionales en vez de E-componentes, parece ser mucho más cómodo. Esta parece haber sido también la opinión de Quine, pues en QS ha preferido seguir el camino sugerido en el texto.

Otro asunto que debe considerarse en esta sección es el de las E-cuantificaciones con operandos c-inconsistentes o contradictorios, cuya situación es similar, mutatis mutandis, a la de las cuantificaciones con operandos c-válidos en el procedimiento QS. Como una truth-function c-inconsistente carece de FNDP, debe reducirse el operando a otro equivalente de la forma 'P$\overline{P}$', que no es en rigor una FNDP, y, al construir la tabla de valores para dicha E-cuantificación, asignarle el valor F en todos sus arreglos. O, si se adopta la condensación propuesta arriba, toda E-cuantificación de esa especie no requerirá ya ser reemplazada por la disyunción de sus E-componentes, que no los tiene, y aparecerá en todas las líneas de la tabla decisoria final con un valor asignado F. De no tomarse en cuenta estas medidas, VW, como QS en su caso, no siempre permitirá alcanzar resultados correctos.

Constituye asimismo una conveniente simplificación del procedimiento, siempre que se considere que el universo no es vacío(*), el asignar directamente V a toda E-cuantificación con operando c-válido en la totalidad de arreglos de la tabla decisoria final, pues la FNDP de su operando posee 2^n E-componentes (n = número de propiedades exhibidas por la fórmula en que aparece dicha E-cuantificación), y poder prescindir de ella es de sumo beneficio para la sencillez del proceso, trátese de VW original o compendiado. Nada impide este proceder, de pura naturaleza algorítmica, en virtud de las reglas mismas del procedimiento (**).

Culmina esta sección ofreciendo algunos ejemplos que ilustran las modificaciones sugeridas.

(*) La razón de esta restricción, así como el importante papel que juega en VW la condición de un universo no vacío, aparecen en la sección 6, infra.

(**) Como en el caso de QS, puede adscribirse a VW con apreciable provecho el método resolutivo de Quine, siempre que aparezcan en S E-cuantificaciones con operandos c-válidos o c-inconsistentes y se considere que el universo no es vacío.

I) Se resuelve aquí nuevamente el ejemplo mediante el cual se explicó la forma de emplear las reglas de VW.

$$U(P \supset Q) . U(R \supset P) . \supset . U(R \supset Q) \qquad S$$

Reemplazando cuantificadores:

$$\sim E \sim (P \supset Q) . \sim E \sim (R \supset P) . \supset . \sim E \sim (R \supset Q)$$

Reemplazando los operandos por sus respectivas FNDP, obtenidas de la manera que ya se indicó:

$$\sim E(P\bar{Q}R \vee P\bar{Q}\bar{R}) . \sim E(\bar{P}QR \vee \bar{P}\bar{Q}R) . \supset . \sim E(P\bar{Q}R \vee \bar{P}\bar{Q}R)$$

Distribuyendo los E-cuantificadores:

$$\sim(E\ P\bar{Q}R \vee E\ P\bar{Q}\bar{R}) . \sim(E\ \bar{P}QR \vee E\ \bar{P}\bar{Q}R) . \supset . \sim(E\ P\bar{Q}R \vee E\ \bar{P}\bar{Q}R) \qquad S_1$$

Reemplazando por letras proposicionales los componentes de S_1 se llega primero a

$$\sim(p \vee q) . \sim(r \vee s) . \supset . \sim(p \vee s)$$

y luego a

$$\sim p . \sim q . \sim r . \sim s . \supset . \sim p . \sim s \ ,$$

que es una truth-function palmariamente tautológica. S es válida.

II) La solución del ejemplo II de la sección 3 de este capítulo, que quedó allí en suspenso, se completa a continuación mediante la aplicación de VW en su versión abreviada.

S, una vez substituídos los operandos de las E-cuantificaciones por sus respectivas FNDP, queda convertido en

$$E(PQR \vee PQ\bar{R} \vee P\bar{Q}R \vee P\bar{Q}\bar{R}) . E(PQR \vee PQ\bar{R} \vee \bar{P}QR \vee \bar{P}Q\bar{R}) . \sim E(PQR \vee PQ\bar{R}) .$$
$$. \sim E(PQ\bar{R} \vee \bar{P}Q\bar{R}) . \supset . E(\bar{P}QR \vee \bar{P}\bar{Q}R) \ .$$

Distribuyendo los cuantificadores se obtiene la forma normal

$$E\ PQR \vee E\ PQ\bar{R} \vee E\ P\bar{Q}R \vee E\ P\bar{Q}\bar{R} . E\ PQR \vee E\ PQ\bar{R} \vee E\ \bar{P}QR \vee E\ \bar{P}Q\bar{R} .$$
$$. \sim(E\ PQR \vee E\ PQ\bar{R}) . \sim(E\ PQ\bar{R} \vee E\ \bar{P}Q\bar{R}) . \supset . E\ \bar{P}QR \vee E\ \bar{P}\bar{Q}R \qquad S_1$$

o, apelando a letras proposicionales,

$$p \lor q \lor r \lor s . p \lor q \lor t \lor w . \sim(p \lor q) . \sim(q \lor w) . \supset . t \lor z \; .$$

Simplificando esta última expresión se obtiene primero

$$p \lor q \lor r \lor s . p \lor q \lor t \lor w . \sim p . \sim q . \sim w . \supset . t \lor z \; ,$$

luego

$$r \lor s . t . \sim p . \sim q . \sim w . \supset . t \lor z \; ,$$

y por último

$$\sim(r \lor s) \lor \sim t \lor p \lor q \lor w \lor t \lor z \; .$$

Como la truth-function alcanzada es trivialmente tautológica, S, modo Fesapo con condición existencial, es válida.

III) $$E \sim(P . \supset . P \lor Q) . \supset . E(P \lor Q) \qquad S$$

Se halla a continuación la FNDP de los operandos.

a)

P Q	$\sim$(P.	$\supset$ .P	$\lor$ Q)
	F	V	V
	F	V	V
	F	V	V
	F	V	V

El operando del antecedente ha resultado inconsistente y por tanto carece de FNDP. De acuerdo a lo dicho será reemplazado por $P\bar{P}$ y se asignará F a E $P\bar{P}$ en todas las líneas de las tablas en que aparezca.

b)

P Q	P $\lor$ Q
	V
	V
	V
	F

$$E\ PQ \lor E\ P\bar{Q} \lor E\ \bar{P}Q$$

La reducida de S será

$$E\ P\bar{P} . \supset . E\ PQ \lor E\ P\bar{Q} \lor E\ \bar{P}Q \; , \qquad S_1$$

y como el antecedente es F en todos los arreglos de la respectiva tabla, S_1 y S son válidas (*).

IV) $E(P \vee \sim P) . \supset : U(P \supset \sim Q) . U(Q \supset R) . \supset . E(R . \sim P)$ S (**)

Reemplazando cuantificadores:

$$E(P \vee \sim P) . \supset : \sim E \sim (P \supset \sim Q) . \sim E \sim (Q \supset R) . \supset . E(R . \sim P) \qquad S'$$

Hallando la FNDP de cada operando:

1) '$P \vee \sim P$' es c-válido. Por lo tanto, de acuerdo a lo dicho, '$E(P \vee \sim P)$' será substituído por $\top$ en todas sus ocurrencias.

2) $E(PQR \vee PQ\bar{R})$ (+)

3) $E(PQ\bar{R} \vee \bar{P}Q\bar{R})$ (+)

4) $E(\bar{P}QR \vee \bar{P}\bar{Q}R)$ (+)

La "forma normal" de S es, entonces,

$\top . \supset : \sim(E\ PQR \vee E\ PQ\bar{R}) . \sim(E\ PQ\bar{R} \vee E\ \bar{P}Q\bar{R}) . \supset . E\ \bar{P}QR \vee E\ \bar{P}\bar{Q}R$,

o, con letras proposicionales en vez de E-componentes,

$$\top . \supset : \sim(p \vee q) . \sim(q \vee r) . \supset . s \vee t \ .$$

Aplicando el método resolutivo y simplificando la expresión anterior se obtiene

$$p \vee q \vee r \vee s \vee t \ ,$$

que no es tautológico. S no es válida (++).

(*) Habría bastado también, una vez sabida la inconsistencia de '$\sim(P . \supset . P \vee Q)$', **reducir** S a '$\bot \supset E(P \supset Q)$', que equivale a $\top$, para llegar rápidamente al mismo resultado.

(**) Modo Fesapo, sin condición existencial, para un universo no vacío. Sobre el papel del antecedente en esta fórmula, véase la sección 6, infra.

(+) Véase el ejemplo II de la sección 3 de este capítulo.

(++) La substitución de '$E(P \vee \sim P)$' por $\top$ y su posterior eliminación permite evitar la forma normal

$E\ PQR \vee E\ PQ\bar{R} \vee E\ P\bar{Q}R \vee E\ P\bar{Q}\bar{R} \vee E\ \bar{P}QR \vee E\ \bar{P}Q\bar{R} \vee E\ \bar{P}\bar{Q}R \vee E\ \bar{P}\bar{Q}\bar{R} . \supset :$

$. \supset : \sim(E\ PQR \vee E\ PQ\bar{R}) . \sim(E\ PQ\bar{R} \vee E\ \bar{P}Q\bar{R}) . \supset . E\ \bar{P}QR \vee E\ \bar{P}\bar{Q}R$,

cuya evaluación tabular es requerida por VW abreviado, o una primera tabla, con el procedimiento original, cuyo número de arreglos ascendería igualmente a 256.

5. No hay duda alguna - y no podía ser de otro modo - que Von Wright ha tenido en mente la mencionada posibilidad de reunir en una sola las dos reglas (c) y (d), pues al término de su monografía introduce de improviso la noción de "forma normal disyuntiva absolutamente perfecta" e indica la forma de servirse de ella para decidir acerca de la validez o invalidez de una fórmula monádica dada. Dicha forma se obtiene "by replacing any one of the E-sentences by a disjunction of E-constituents of the complex and transforming the molecular complex of E-sentences thus obtained into its perfect disjunctive normal form" (*), debiéndose luego evaluarla tabularmente, pues una FNDAP "shows with which ones of the possible combinations of truth-values in its E-constituents the molecular complex expresses agreement and with which ones it expresses disagreement. If it agrees with all possibilities it is a Truth of Logic" (**).

Esto no puede significar sino que Von Wright está pensando en un procedimiento que sigue una línea similar a la enmienda ya propuesta en la sección anterior de este trabajo. Pero vale la pena averiguar si dicha reducción a FNDAP y su posterior evaluación dan efectivamente lugar a una abreviación de VW o constituyen únicamente una variante sin interés práctico.

La FNDAP de S, de acuerdo al pasaje citado, no puede obtenerse sino por un método tabular, idéntico al recomendado en la sección 2, supra, para hallar la FNDP de los operandos de los E-cuantificadores de S, o, de otro modo, por la expansión y posterior aplicación de conocidas reglas de distribución y simplificación, considerando a los E-componentes, en uno y otro caso, como letras proposicionales. Pero, de optarse [redacted] la primera vía, la FNDAP alcanzada es superflua, pues si S es válido en función de sus E-componentes, como tendrá inevitablemente que indicar su

(*) Ibid., p. 42.
(**) Loc. cit.

tabla en caso de serlo, la decisión ha sido alcanzada y la FNDAP no es ya necesaria; y si no lo es, también se ha llegado a una decisión, pues en caso de no ser válida S, su FNDAP tampoco ha de serlo.

Queda entonces, como único medio factible, el segundo, pero su puesta en práctica es realmente abrumadora, como se aprecia al resolver en seguida, por tercera vez, el mismo ejemplo que ilustró inicialmente la aplicación de VW.

Sea S la fórmula

$$U(P \supset Q).\ U(R \supset P).\ \supset .\ U(R \supset Q)\ .$$

Su correspondiente forma normal es

$$\sim[E\ P\bar{Q}R \vee E\ P\bar{Q}\bar{R}].\sim[E\ \bar{P}QR \vee E\ \bar{P}\bar{Q}R].\ \supset .\sim[E\ P\bar{Q}R \vee E\ \bar{P}\bar{Q}R], \qquad S_1$$

o, recurriendo a letras proposicionales,

$$\sim(p \vee q).\sim(r \vee s).\ \supset .\sim(p \vee s)\ .$$

Debe ahora hallarse la FNDAP, para lo cual se llega primero a

$$\sim[\sim(p \vee q).\sim(r \vee s)] \vee .\sim(p \vee s)$$

y luego a

$$p \vee q \vee r \vee s \vee (\sim p.\sim s)\ . \qquad S_2$$

Expandiendo S_2 :

$$[p.(q \vee \bar{q}).(r \vee \bar{r}).(s \vee \bar{s})] \vee [q.(p \vee \bar{p}).(r \vee \bar{r}).(s \vee \bar{s})]$$
$$\vee [r.(p \vee \bar{p}).(q \vee \bar{q}).(s \vee \bar{s})] \vee [s.(p \vee \bar{p}).(q \vee \bar{q}).(r \vee \bar{r})]$$
$$\vee [\bar{p}.\bar{s}.(q \vee \bar{q}).(r \vee \bar{r})]$$

Distribuyendo y reordenando alfabéticamente cada d-componete:

$$pqrs \vee pqr\bar{s} \vee pq\bar{r}s \vee pq\bar{r}\bar{s} \vee p\bar{q}rs \vee p\bar{q}r\bar{s} \vee p\bar{q}\bar{r}s \vee p\bar{q}\bar{r}\bar{s}$$
$$\vee\ pqrs \vee pqr\bar{s} \vee pq\bar{r}s \vee pq\bar{r}\bar{s} \vee \bar{p}qrs \vee \bar{p}qr\bar{s} \vee \bar{p}q\bar{r}s \vee \bar{p}q\bar{r}\bar{s}$$
$$\vee\ pqrs \vee pqr\bar{s} \vee p\bar{q}rs \vee p\bar{q}r\bar{s} \vee \bar{p}qrs \vee \bar{p}qr\bar{s} \vee \bar{p}\bar{q}rs \vee \bar{p}\bar{q}r\bar{s}$$
$$\vee\ pqrs \vee pq\bar{r}s \vee p\bar{q}rs \vee p\bar{q}\bar{r}s \vee \bar{p}qrs \vee \bar{p}q\bar{r}s \vee \bar{p}\bar{q}rs \vee \bar{p}\bar{q}\bar{r}s$$
$$\vee\ \bar{p}qr\bar{s} \vee \bar{p}q\bar{r}\bar{s} \vee \bar{p}\bar{q}r\bar{s} \vee \bar{p}\bar{q}\bar{r}\bar{s}$$

Eliminando las conjunciones superfluas y reordenando las restantes se llega a la FNDAP buscada, es decir,

$$pqrs \vee pqr\bar{s} \vee pq\bar{r}s \vee pq\bar{r}\bar{s} \vee p\bar{q}rs \vee p\bar{q}r\bar{s} \vee p\bar{q}\bar{r}s \vee p\bar{q}\bar{r}\bar{s}$$
$$\vee\ \bar{p}qrs \vee \bar{p}qr\bar{s} \vee \bar{p}q\bar{r}s \vee \bar{p}q\bar{r}\bar{s} \vee \bar{p}\bar{q}rs \vee \bar{p}\bar{q}r\bar{s} \vee \bar{p}\bar{q}\bar{r}s \vee \bar{p}\bar{q}\bar{r}\bar{s}\ .$$

Como toda truth-function es tautológica si y sólo si su FNDP tiene 2^n conjunciones (n = número de letras proposicionales), y éste es el caso de la FNDAP a que se ha llegado, S es válida (*).

La reforma propuesta por Von Wright no aporta, como es palmario, ningún beneficio práctico, y desde este ángulo es preferible olvidarla.

6. El procedimiento de Von Wright, como ya se mencionó, es esencialmente el mismo que QS, pero tal vez llame la atención cómo es que en éste último, una vez hallada la forma canónica (idéntica, previo intercambio de cuantificadores y aplicación de conocidas equivalencias entre conectivas, a la que adopta S en VW cuando los E-cuantificadores se distribuyen sobre la disyunción del operando puesto ya en FNDP), se debe proceder a comprobar si una fórmula específica A la c-implica o no, mientras que en VW tal comprobación queda suprimida.

(*) Podría elevarse a regla de la segunda versión de VW esta propiedad de las FNDAP, que el mismo Von Wright menciona en Logical Studies, p. 33, y así se eliminaría una tabla que nada tiene de alentadora.

La razón de esta disparidad es muy simple. En el sistema de Von Wright no se excluye la posibilidad de un universo vacío de objetos, lo que no sucede en lo que él denomina "traditional calculus" (*). La fórmula ' UP $\supset$ EP', que no es válida cuando se la somete a VW (**), puede ser probada entonces en la Lógica tradicional, pero no en la del autor finlandés, o, lo que es lo mismo, dicha fórmula no es válida para un universo vacío y requiere, para serlo, la existencia de por lo menos un objeto. Su tabla decisoria lo deja ver claramente: cuando las propiedades P y ~P son F, esto es, cuando no existe objeto que las posea y el universo es por tanto vacío, ' UP $\supset$ EP' es falsa."It can be regarded as a degenerated form of 'E(P $\vee$ $\bar{P}$).$\supset$. UP $\supset$ EP' "(+), que, como se ha visto en el ejemplo IV de la sección 3, supra, sí es una "verdad de la lógica" para VW. De manera que, puede inferirse, para saber, por aplicación de VW, si una fórmula es o no válida dentro de la Lógica tradicional, debe anteponérsele previamente como antecedente la fórmula 'E(P$\vee$$\bar{P}$)' y someter el condicional resultante a las operaciones de costumbre (++).

Con QS las cosas suceden a la inversa desde el punto de vista del procedimiento, pero son exactamente las mismas en relación a la idea de la existencia de individuos en el universo. Si ' UP $\supset$ EP' es sometida a QS <u>y se suprime el condicional para la decisión</u>, no es válida, como se vió en su lugar, y este resultado coincide con el obtenido mediante VW, pero tan pronto como se reincorpore aquel condicional su validez quedará establecida. Quiere decir entonces que VW y QS difieren únicamente en el tratamiento de la condición de un universo no vacío: QS la reclama de antemano y la introduce en la secuela de operaciones mediante

(*) Op. cit., p. 43.
(**) Véase el ejemplo III resuelto en la sección 3, supra.
(+) Op. cit., p. 43.
(++) Este antecedente pone como condición suficiente de la validez de la fórmula la existencia de P o de ~P.

la construcción de un condicional de determinada estructura, mientras que VW empieza por no exigirla, pero, si se decide a adoptarla, la técnica empleada es la de reformular S con el agregado de un antecedente 'E(P ∨ ∼P)', donde P representa una propiedad <u>cualquiera</u>, exhibida o no por S (*).

Pero aquí, como en QS, es preferible seguir el temperamento más práctico de Church, ya indicado en II, 9, supra: aceptar la condición de un universo no vacío (es decir, adoptar el punto de vista tradicional) da igual que borrar de la tabla decisoria final el arreglo donde se asigna F a todos los E-componentes de las E-cuantificaciones de S. Así, por ejemplo, en el caso de 'UP ⊃ EP', esta expresión resulta válida si se borra el último arreglo de la tabla (**). 'E(P ∨ ∼P)', por otro lado, no es una "verdad de la Lógica" en el sistema de Von Wright, pero sí en otro que dé por cierta la existencia de por lo menos un objeto en el universo, como se aprecia al aplicar en la tabla respectiva el criterio de Church.

7. El procedimiento VW, de acuerdo a lo expresado por su autor, sólo es aplicable a una fórmula monádica de primer grado "which contains only one-place predicates and no sentence variable and no free individual variable" (+), lo cual, si se tomara sin mayo-

---

(*) Incluso esta diferencia es sólo aparente. Obsérvese que si se halla la FNDP del operando '(P ∨ ∼P)' respecto a todas las propiedades que exhibe S, se distribuye luego el E-cuantificador y se aplica finalmente la equivalencia de De Morgan, intercambiando cuantificadores, se llega siempre a una fórmula que no es otra que el antecedente A del condicional '∼(A.∼C)' empleado en QS.
(**) No olvidar lo que se dijo ya, al estudiar QS, acerca de la condición existencial o "existential import". Von Wright, a propósito, manipula la condición del universo no vacío de la manera apuntada, mientras que traduce la condición existencial por una conjunción de la forma 'E $\mathcal{P}_1$.E $\mathcal{P}_2$....' (donde '$\mathcal{P}_i$' representa una propiedad exhibida por S), que se añade, como nueva premisa, a la o las de la inferencia cuya validez se trata de analizar. Véase al respecto el ejemplo II, resuelto en la sección 3, supra.
(+) Op. cit., p. 43.

res aclaraciones, restringiría enormemente su campo de acción y significaría aceptar graves limitaciones a las reales posibilidades del método.

Pero todo hace creer que la restricción impuesta por Von Wright no toma en cuenta, con toda razón, las técnicas adicionales que, como en los demás procedimientos estudiados en este trabajo, se suelen agregar a éstos para permitir su aplicación a toda clase de fórmulas predicativas monádicas de primer grado.

De manera que VW puede hacerse extensivo a fórmulas con variables libres, para lo cual se cerrará de antemano la fórmula dada, aplicando después una técnica reductiva a fórmulas básicas, sea la de Quine que aparece descrita al tratar acerca de QL, sea la de Behmann, que el autor norteamericano adscribe a su procedimiento QM; y también a fórmulas que exhiben letras proposicionales, caso en el que éstas se eliminarán previamente utilizando la misma técnica empleada por Quine en QM para las fórmulas atípicas, o se empezará por sacar de los operandos a dichas letras para proseguir luego en la forma de costumbre, considerándolas, de la misma manera que en QS, como sendos E-componentes (o cuantificaciones típicas).

En lo concerniente a fórmulas que exhiben constantes individuales, VW, como QS, no puede garantizar la corrección de todos los resultados que obtenga (*).

8. Luego de lo expuesto puede concluirse lo siguiente respecto al procedimiento concebido por el Profesor Von Wright:

a) Tal como se presenta originalmente, VW, dada su similitud con QS, comparte todas las ventajas y desventajas de éste, llegando incluso, sin beneficio aparente, a aumentar el número de tablas por efectuar.

b) Como era de esperar, el procedimiento VW, para ser apli-

(*) Véase II. 6, supra.

cado con éxito a una fórmula que ostenta cuantificaciones con operandos c-inconsistentes, requiere la aclaración efectuada en la sección 4, supra, y que la exposición original omite mencionar.

c) VW no puede ser aplicado tampoco a fórmulas con constantes individuales, y en esto no hace sino alinearse con los tres métodos de Quine ya discutidos.

d) En cuanto a grado de laboriosidad su situación no es muy diferente de la de los demás procedimientos decisorios, si bien con la simplificación consignada en la sección 4, supra, el procedimiento original se abrevia y aclara considerablemente en lo que concierne a su ilación aparente y a su puesta en práctica. Téngase muy presente que si bien el número de arreglos de la tabla en la versión simplificada es igual al de la primera tabla prescrita por las reglas originales, en esta última no es posible utilizar conocidas técnicas de abreviación (como sí sucede en aquélla), pues es imprescindible saber el resultado de todas las líneas para poder confeccionar la segunda y definitiva tabla.

e) Modificado en sus reglas, a las que habrá necesidad de incorporar alguna técnica de reducción a fórmulas básicas, y habida cuenta de la importante adición de Church acerca de la existencia o no de objetos en el universo, VW es un procedimiento más directo y menos afectado que QL, pero más laborioso y menos elegante que QM.

C A P I T U L O VI

El procedimiento Bernays-Schönfinkel

1. Paul Bernays y Moses Schönfinkel, en el importantísimo artículo "Zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik", aparecido en Mathematische Annalen, tomo 99 (1928), pp. 342/372, proponen un procedimiento decisorio para fórmulas monádicas de primer grado que se caracteriza principalmente, a diferencia de los ya estudiados, por introducir como nociones capitales las de "dominio de individuos" ("Individuenbereich") y "determinación del número de individuos que ha de poseer un dominio" ("Anzahlbestimmung").

Las variables individuales de una fórmula monádica toman valores de un dominio de individuos bien definido. A toda fórmula de esa especie, una vez reemplazadas sus variables individuales por una combinación cualquiera de elementos de dicho dominio, le habrá de corresponder uno de los valores Verdadero o Falso. Cuando el valor resulta ser V para todas las combinaciones de individuos de un dominio D cualquiera, se dice que la fórmula es D-válida en o para ese dominio. Y si la fórmula resulta ser válida en o para cualquier dominio, se dirá que es universalmente válida o, como se la ha llamado hasta aquí, válida o l-verdadera. Como todo dominio de individuos bien definido sólo lo es, para efecto de este procedimiento, por el número cardinal que corresponde a su dimensión, se puede hablar de un dominio con r miembros o r-dominio y, por lo tanto, de r-validez ($r \geq 1$).

Los autores empiezan describiendo el procedimiento para determinar algorítmicamente la r-validez de una fórmula monádica cerrada cualquiera, donde r es un número finito dado (*), y pro-

(*) "...gegebene endlichen Anzahl..." (Op. cit., p. 352).

ceden luego a ampliarlo para un dominio cualquiera, finito o infinito.

La sección que sigue trata de aquél, mientras que la sección 3 se ocupa de la citada ampliación.

2. Sean $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_r$, los individuos de un dominio finito D_r. Según Bernays y Schönfinkel la operación del cuantificador universal '(x)' sobre su respectivo operando 'Øx' es equivalente ("gleichbedeutend") a unir mediante conjunción todas las expresiones que resultan de substituir ordenadamente cada 'x' de 'Øx' por cada uno de los elementos del dominio $\{a_1, \ldots\ldots, a_r\}$, y la del operador existencial '(∃x)' equivalente asimismo a unir con disyunción expresiones obtenidas mediante una substitución similar. De esta manera es posible "eliminar" todos los cuantificadores que una fórmula exhibe.

Por otro lado, si 'αx' es una fórmula predicativa elemental y 'α' una letra o variable predicativa, al ser reemplazada 'x' de la manera antedicha por r elementos 'a_i', se obtendrán las expresiones 'αa_1', 'αa_2', ..., 'αa_r', cada una de las cuales, tan pronto como 'α' es reemplazada por un predicado determinado, es una proposición determinada, con un determinado valor V o F; y, a la inversa, como afirman aquellos autores, cada asignación posible de valores V o F a cada expresión 'αa_i' determina la característica tabular ("Wertverlauf") de 'αx'. Según esto es posible obtener, en vez de 'αx', r valores independientes el uno del otro (*).

Es así como una fórmula monádica S puede ser reducida a una truth-function S' compuesta de expresiones de la forma 'αa', y entonces la validez de S para un dominio dado de r individuos, es

---

(*) Loc. cit.

decir, su r-validez, equivale al carácter tautológico de dicha truth-function S', cuyo origen ya se indicó, y es por tanto decidible mediante el uso de la tabla de valores (*).

Estas ideas sirven de fundamento a las instrucciones que constituyen el procedimiento BS (**) para la r-validez y que son las siguientes:

a) Sea S una fórmula monádica cerrada, sin signo de igualdad ni constantes individuales ni letras proposicionales, y r el número de individuos de un dominio D dado.

b) Substitúyase en S cada cuantificación de la forma '$(x)\phi x$' por la conjunción '$\phi a_1 . \phi a_2 ...... \phi a_r$', o, en otras palabras, elimínense los cuantificadores universales de S.

c) Substitúyase en S cada cuantificación de la forma '$(\exists x)\phi x$' por la disyunción '$\phi a_1 \vee \phi a_2 \vee ..... \vee \phi a_r$', es decir, elimínense los cuantificadores existenciales de S (+).

d) Evalúese tabularmente la truth-function S' a la que se ha reducido S.

e) S es r-válida o válida para el dominio D si y sólo si S' es tautológica.

Siguen algunos sencillos ejemplos.

(*) "Die Allgemeingültigkeit der vorgelegten Formel für eine gegebene Anzahl n von Individuen ist somit gleichbedeutend mit der Allgemeingültigkeit einer Aussagenformel, und für diese können wir die Frage der Allgemeingültigkeit entscheiden".(Loc. cit.).
(**) Con estas letras será mencionado en lo sucesivo el procedimiento de Bernays y Schönfinkel.
(+) Cuando las cuantificaciones de S son simples es fácil y muy conveniente eliminar todos los cuantificadores, universales y existenciales, en una sola operación. Téngase presente, por otro lado, que nada obsta para que en 'ϕx' aparezcan otras cuantificaciones con distintas variables.

I) $$(x)fx \supset (\exists x)(gx \supset fx)$$ S

Para r = 3, S' será

$$fa.fb.fc. \supset :ga \supset fa. \vee .gb \supset fb. \vee .gc \supset fc \quad (*) .$$

La tabla poseerá 2^{rk}, esto es, $2^{3x2} = 64$ líneas o arreglos, de modo que en este caso (y en todos los que se resuelvan mediante BS) resulta recomendable en grado sumo la reducción de S' a sus formas más simples mediante la aplicación de conocidas reglas de Lógica proposicional.En el caso presente se elimina '$\supset$', obteniéndose así la truth function

$$\sim fa \vee \sim fb \vee \sim fc \vee \sim ga \vee fa \vee \sim gb \vee fb \vee \sim gc \vee fc ,$$

visiblemente tautológica, y por tanto S es 3-válida,es decir, válida en un dominio compuesto por tres individuos.

II) $$(x)[fx \supset (\exists y)(fy \supset gy)]$$ S

Se trata de saber si S es 3-válida, como en el ejemplo anterior. Utilizando tres constantes de substitución y eliminando primero el cuantificador universal se tiene

$$fa \supset (\exists y)(fy \supset gy).fb \supset (\exists y)(fy \supset gy).fc \supset (\exists y)(fy \supset gy) ,$$

que, al suprimirse el cuantificador existencial, se transforma en

$$fa \supset (fa \supset ga. \vee .fb \supset gb. \vee .fc \supset gc).fb \supset (fa \supset ga. \vee .fb \supset gb. \vee .fc \supset gc).$$
$$.fc \supset (fa \supset ga. \vee .fb \supset gb. \vee .fc \supset gc). \qquad .S'$$

Eliminando '$\supset$' y recurriendo a la regla de distribución se llega a

$$\sim fa. \sim fb. \sim fc. \vee .(\sim fa \vee ga \vee \sim fb \vee gb \vee \sim fc \vee gc) ,$$

que se reduce, por absorción y simplificación, a

(*) Se usan aquí y se usarán en lo sucesivo las letras a,b,c,..., en vez de a_1, a_2, a_3,....., por razones de comodidad.

$$\sim fa \vee ga \vee \sim fb \vee gb \vee \sim fc \vee gc ,$$

en manera alguna tautológica. S no es 3-válida.

3. La insuficiencia de las reglas mencionadas es evidente, pues, como afirman sus autores, "können wir ja auch nicht für jede endliche Individuenzahl die entsprechende Aussagenformel auf ihre Richtigkeit prüfen" (*). Así es, en efecto, porque si se piensa en generalizar la noción de r-validez para llegar a la de validez universal, es decir, validez en un dominio cualquiera, no es posible imaginar siquiera que el camino adecuado sea el de demostrar la validez de una fórmula S demostrando su 1-validez, 2-validez,......., ya que el número de dominios finitos es imposible de agotar.

De allí el origen e importancia del teorema debido a Bernays y Schönfinkel, que puede enunciarse así: si k es el número de letras predicativas que exhibe una fórmula monádica de primer grado, ésta es válida para todo dominio de individuos si y sólo si lo es para un dominio compuesto por 2^k individuos (**). La demostración, que no es aquí pertinente, corre en las páginas 353-355 del artículo mencionado (+).

Con este agregado, el procedimiento BS, entendido ahora como algoritmo para decidir acerca de la validez universal o 1-verdad de fórmulas predicativas monádicas de primer grado, se compone de las siguientes reglas o instrucciones:

(*) Op. cit., p. 352.
(**) "Ist k die Anzahl der in einer Formel von der betrachteten Art vorkommenden Prädikatenvariablen, so ist die Formel allgemeingültig für jeden Individuenbereich, falls sie für einen Bereich von 2^k Individuen allgemeingültig ist." (Loc. cit.).
(+) Pueden verse también las versiones de Hilbert-Ackermann (Lógica Teórica, pp. 145-147) y de Church (Introduction, p. 253).

a) Sea S una fórmula cerrada, sin igualdad, de la especie indicada, que puede eventualmente exhibir letras proposicionales y/o constantes individuales (*), y **k** el número de sus letras predicativas.

b) Substitúyase en S toda cuantificación de la forma '$(x)\emptyset x$' por la conjunción '$\emptyset a_1 . \emptyset a_2 . \ldots . \emptyset a_{2^k}$', en la que cada componente resulta de reemplazar 'x' por 'a_i' en '$\emptyset x$'.

c) Substitúyase en S toda cuantificación de la forma '$(\exists x)\emptyset x$' por la disyunción '$\emptyset a_1 \vee \emptyset a_2 \vee \ldots \vee \emptyset a_{2^k}$', obtenida de manera similar a la indicada en el inciso anterior.

d) Procédase a resolver la tabla de valores para la truth-function S' a que se ha reducido S.

e) S es válida para todo dominio de individuos si y sólo si S' es tautológica.

4. En esta sección se ofrecen algunos ejemplos que servirán para ilustrar diversos matices propios de la aplicación de BS.

I) $$(\exists x)fx . (\exists x)gx . \supset . (\exists x)(fx \vee gx) \qquad S$$

Se trata de saber si S es válido o 1-verdadero. De acuerdo al teorema expuesto, la validez universal de S equivale a su 2^k-validez, de modo que la clase de las constantes de substitución deberá poseer cuatro elementos. Eliminando los cuantificadores se obtiene

$$(fa \vee fb \vee fc \vee fd).(ga \vee gb \vee gc \vee gd). \supset .(fa \vee ga) \vee (fb \vee gb) \vee (fc \vee gc) \vee (fd \vee gd) . \qquad S'$$

(*) La aparición de letras proposicionales y/o constantes individuales, no prevista explícitamente en el artículo citado, en nada impide la aplicación correcta de BS. Las m constantes individuales que S exhibe deben pertenecer a las 2^k constantes requeridas, y si $m \geq 2^k$ el dominio de las constantes de reemplazo habrá de ser $\{a_1, \ldots, a_{2^k}, \ldots, a_m\}$.

Eliminando ahora '$\supset$' y reordenando los **últimos componentes** de la disyunción se llega a

$$\sim(fa \vee fb \vee fc \vee fd) \vee \sim(ga \vee gb \vee gc \vee gd)$$
$$\vee(fa \vee fb \vee fc \vee fd) \vee(ga \vee gb \vee gc \vee gd),$$

que es tautológica. S, entonces, es 1-verdadera, o universalmente válida, como acostumbran decir Bernays y Schönfinkel.

II) $(\exists x)gx.(x)(fx \supset gx).(x)(gx \supset hx). \supset .(\exists x)(hx.\sim fx)$ S

El dominio D será {a,b,c,d,e,i,j,l} pues k = 3. S', obtenida como de costumbre, es

$$(ga \vee gb \vee gc \vee gd \vee ge \vee gi \vee gj \vee gl).(fa \supset ga).(fb \supset gb).(fc \supset gc).$$
$$.(fd \supset gd).(fe \supset ge).(fi \supset gi).(fj \supset gj).(fl \supset gl).(ga \supset ha).$$
$$.(gb \supset hb).(gc \supset hc).gd \supset hd).(ge \supset he).(gi \supset hi).(gj \supset hj).$$
$$.(gl \supset hl). \supset .(ha.\sim fa) \vee (hb.\sim fb) \vee (hc.\sim fc) \vee (hd.\sim fd) \vee (he.\sim fe)$$
$$\vee(hi.\sim fi) \vee (hj.\sim fj) \vee (hl.\sim fl) .$$

La tabla debe poseer $2^{kx2^k} = 2^{3x8} = 2^{24}$ líneas o arreglos. S será válido si y sólo si ninguno de ellos resulta ser falso.

III) $(x)[fx \supset (\exists y)\{gy \supset (z)gz\}]$ S

Eliminando '(x)' :

$$fa \supset (\exists y)[gy \supset (z)gz].fb \supset (\exists y)[gy \supset (z)gz].$$
$$.fc \supset (\exists y)[gy \supset (z)gz].fd \supset (\exists y)[gy \supset (z)gz] \quad S_1$$

Eliminando '($\exists$y)' :

$$fa \supset [ga \supset (z)gz.\vee.gb \supset (z)gz.\vee.gc \supset (z)gz.\vee.gd \supset (z)gz].$$
$$.fb \supset [ga \supset (z)gz.\vee.gb \supset (z)gz.\vee.gc \supset (z)gz.\vee.gd \supset (z)gz].$$
$$.fc \supset [ga \supset (z)gz.\vee.gb \supset (z)gz.\vee.gc \supset (z)gz.\vee.gd \supset (z)gz].$$
$$.fd \supset [ga \supset (z)gz.\vee.gb \supset (z)gz.\vee.gc \supset (z)gz.\vee.gd \supset (z)gz] \quad S_2$$

Eliminando, por último, '(z)' :

$$fa. \supset .(ga. \supset .ga.gb.gc.gd) \vee (gb. \supset .ga.gb.gc.gd)$$
$$\vee (gc. \supset .ga.gb.gc.gd) \vee (gd. \supset .ga.gb.gc.gd).$$
$$:fb. \supset .(ga. \supset .ga.gb.gc.gd) \vee (gb. \supset .ga.gb.gc.gd)$$
$$\vee (gc. \supset .ga.gb.gc.gd) \vee (gd. \supset .ga.gb.gc.gd).$$
$$:fc. \supset .(ga. \supset .ga.gb.gc.gd) \vee (gb. \supset .ga.gb.gc.gd)$$
$$\vee (gc. \supset .ga.gb.gc.gd) \vee (gd. \supset .ga.gb.gc.gd).$$
$$:fd. \supset .(ga. \supset .ga.gb.gc.gd) \vee (gb. \supset .ga.gb.gc.gd)$$
$$\vee (gc. \supset .ga.gb.gc.gd) \vee (gd. \supset .ga.gb.gc.gd) \qquad S_1$$

Aplicando el principio de distribución luego de haber elimi nado '$\supset$' se obtiene la expresión

$$\sim fa.\sim fb.\sim fc.\sim fd. \vee .\sim ga. \vee .gb.gc.gd. \vee .\sim gb. \vee .ga.gc.gd. \vee .\sim gc$$
$$. \vee .ga.gb.gd. \vee .\sim gd. \vee .ga.gb.gc \ ,$$

equivalente a S', que es tautológica. Por ello S es válida(*).

IV) $$(x)(y)(\exists z)(fx \supset gz. \supset .fx \supset gy)$$

A diferencia de los ejemplos anteriores, en éste se van a eliminar los cuantificadores yendo de "dentro a afuera", em pezando de esta manera por '$(\exists z)$'.

$$(x)(y)[(fx \supset ga. \supset .fx \supset gy) \vee \text{[redacted]} (fx \supset gb. \supset .fx \supset gy)$$
$$\vee \text{[redacted]} (fx \supset gc. \supset .fx \supset gy) \vee \text{[redacted]} (fx \supset gd. \supset .fx \supset gy)]$$

Eliminando luego '(y)' :

$$(x)[(fx \supset ga. \supset .fx \supset ga) \vee (fx \supset gb. \supset .fx \supset ga) \vee (fx \supset gc. \supset .fx \supset ga)$$
$$\vee (fx \supset gd. \supset .fx \supset ga)$$
$$.(fx \supset ga. \supset .fx \supset gb) \vee (fx \supset gb. \supset .fx \supset gb) \vee (fx \supset gc. \supset .fx \supset gb)$$
$$\vee (fx \supset gd. \supset .fx \supset gb)$$
$$.(fx \supset ga. \supset .fx \supset gc) \vee (fx \supset gb. \supset .fx \supset gc) \vee (fx \supset gc. \supset .fx \supset gc)$$
$$\vee (fx \supset gd. \supset .fx \supset gc)$$
$$.(fx \supset ga. \supset .fx \supset gd) \vee (fx \supset gb. \supset .fx \supset gd) \vee (fx \supset gc. \supset .fx \supset gd)$$
$$\vee (fx \supset gd. \supset .fx \supset gd)]S_1$$

(*) Repárese en lo que facilitará la aplicación de BS la incorporación de una técnica reductiva cualquiera, la de Behmann, por ejemplo. S, en el ejemplo del texto, se reduciría a la fórmula básica '$(\exists x)fx. \supset .(x)gx \supset (x)gx$', que incluso es c-válida.

Eliminando finalmente '(x)' y desarrollando como conjunción <u>sólo el primer k-componente del operando</u>:

$$
\begin{aligned}
&(fa \supset ga . \supset . fa \supset ga) \vee (fa \supset gb . \supset . fa \supset ga) \vee (fa \supset gc . \supset . fa \supset ga) \\
&\qquad \vee (fa \supset gd . \supset . fa \supset ga) \\
.&(fb \supset ga . \supset . fb \supset ga) \vee (fb \supset gb . \supset . fb \supset ga) \vee (fb \supset gc . \supset . fb \supset ga) \\
&\qquad \vee (fb \supset gd . \supset . fb \supset ga) \\
.&(fc \supset ga . \supset . fc \supset ga) \vee (fc \supset gb . \supset . fc \supset ga) \vee (fc \supset gc . \supset . fc \supset ga) \\
&\qquad \vee (fc \supset gd . \supset . fc \supset ga) \\
.&(fd \supset ga . \supset . fd \supset ga) \vee (fd \supset gb . \supset . fd \supset ga) \vee (fd \supset gc . \supset . fd \supset ga) \\
&\qquad \vee (fd \supset gd . \supset . fd \supset ga)
\end{aligned}
$$

Obsérvese que los d-componentes iniciales de cada k-componente son tautológicos y lo es por tanto cada una de las cuatro disyunciones que conforman la expresión, que será así tautológica. Si se desarrollan los otros tres k-componentes del operando de S_1 se dará la misma situación para '$fx \supset gb . \supset . fx \supset gb$', '$fx \supset gc . \supset . fx \supset gc$' y '$fx \supset gd . \supset . fx \supset gd$'.

Por lo tanto la truth-function S' habrá de ser tautológica y S válida.

V) $(x)[fx.p . \supset . (\exists y)(gx . \supset . fy.p)]$ (*) S

Eliminando '(x)':

$$
\begin{aligned}
&[fa.p . \supset . (\exists y)(ga . \supset . fy.p)] . [fb.p . \supset . (\exists y)(gb . \supset . fy.p)] \\
&\quad . [fc.p . \supset . (\exists y)(gc . \supset . fy.p)] . [fd.p . \supset . (\exists y)(gd . \supset . fy.p)]
\end{aligned}
$$

Eliminando '$(\exists y)$':

$$
\begin{aligned}
&[fa.p . \supset . (ga . \supset . fa.p) \vee (ga . \supset . fb.p) \vee (ga . \supset . fc.p) \vee (ga . \supset . fd.p)] \\
.&[fb.p . \supset . (gb . \supset . fa.p) \vee (gb . \supset . fb.p) \vee (gb . \supset . fc.p) \vee (gb . \supset . fd.p)] \\
.&[fc.p . \supset . (gc . \supset . fa.p) \vee (gc . \supset . fb.p) \vee (gc . \supset . fc.p) \vee (gc . \supset . fd.p)] \\
.&[fd.p . \supset . (gd . \supset . fa.p) \vee (gd . \supset . fb.p) \vee (gd . \supset . fc.p) \vee (gd . \supset . fd.p)] \quad S'
\end{aligned}
$$

(*) De Quine, Métodos, p. 265.

Puede apreciarse que, en el primer k-componente de S', 'fa.p' no puede ser V cuando 'ga. ⊃.fa.p' es F, y por lo tanto dicho k-componente es tautológico. Lo mismo sucede con 'fb.p. ⊃:gb. ⊃.fb.p' en el segundo k-componente de S', con 'fc.p. ⊃:gc. ⊃.fc.p' en el tercero y con 'fd.p. ⊃:gd. ⊃.fd.p' en el cuarto. En consecuencia, S' es tautológico y S válido.

VI) $(x)(fx \vee gy). \supset .fc \vee gy$ S(*)

Cerrando S:

$$(y)[(x)(fx \vee gy). \supset .fc \vee gy]$$

Eliminando '(y)':

$$[(x)(fx \vee ga). \supset .fc \vee ga].[(x)(fx \vee gb). \supset .fc \vee gb]$$
$$.[(x)(fx \vee gc). \supset .fc \vee gc].[(x)(fx \vee gd). \supset .fc \vee gd]$$

Eliminando '(x)':

$$fa \vee ga.fb \vee ga.fc \vee ga.fd \vee ga. \supset .fc \vee ga$$
$$.fa \vee gb.fb \vee gb.fc \vee gb.fd \vee gb. \supset .fc \vee gb$$
$$.fa \vee gc.fb \vee gc.fc \vee gc.fd \vee gd. \supset .fc \vee gc$$
$$.fa \vee gd.fb \vee gd.fc \vee gd.fd \vee gd. \supset .fc \vee gd . \qquad S'$$

Como todos los k-componentes de S' son manifiestamente tautológicos, S' también lo es y S es válida.

5. Las siguientes son las apreciaciones que pueden efectuarse a propósito del procedimiento de Bernays y Schönfinkel, sobre la base de lo visto en el presente capítulo:

a) El procedimiento BS es excepcionalmente directo, es decir, no obliga a operaciones que no estén inmediatamente vinculadas al objetivo perseguido o que no sean de la misma especie. Toda la técnica consiste en ir reemplazando metódicamente cuantificaciones por truth-func-

(*) De Copi, Symbolic Logic, p. 99.

tions hasta conseguir la desaparición total de los cuantificadores, con lo que se da paso a la aplicación de las tablas de valores.

b) A pesar de ello las reglas de BS no impiden una complicación progresivamente creciente de la fórmula tratada, que depende en mucho del número y posición de los cuantificadores que figuran en ella. Cuando sea o exhiba una cuantificación compleja de módica dificultad, su reducción a S' resultará casi siempre revesada y escabrosa, y debe esperarse que formen parte de su tabla final un elevado número de arreglos.

c) Existe otro inconveniente en el empleo de BS, y es el de comprobar cómo a medida que se va avanzando hacia la solución, las cosas tienden inexorablemente a complicarse cada vez más. Uno de los factores que más cuenta en la solución de problemas es ver cómo se va despejando el horizonte durante el proceso, y ello estimula y permite redoblar los esfuerzos en procura de la meta. En BS tal cosa no ocurre, y la fórmula inicial es substituída sin pausa alguna, a través de toda la operación, por otras cada vez más complicadas y extensas, que pueden llegar a ser muchas veces de difícil manejo. Quien trate de saber si es válida la fórmula '$(\exists x)(\exists y)(z)(fx \supset gx . \supset . fy \supset gz)$', que apenas tiene dos letras predicativas, tendrá idea de lo que se trata de decir en este inciso.

d) Es posible abreviar o acortar el proceso a que obliga BS (como se ha ilustrado mediante los ejemplos IV y V de la sección 4, supra), pero, aparte de la impropiedad teórica que significa dicha abreviación por tratarse de una técnica no algorítmica, como ya se vió en III.7, inc. g, supra, la ventaja alcanzada no es mucha, pues en una forma o en otra debe contarse siempre con la presencia de la reducida S'. Siempre queda, sin embargo, cuando se trate de fórmulas complejas, la posibilidad de incorporar a BS alguna de las técnicas reductivas o depuradoras que se han descrito en los capítulos anteriores, a costa de la rectilineidad tan peculiar que distingue a BS. (Véase al respecto la nota al ejemplo III de la sección 4, supra).

e) La búsqueda de alguna abreviación de BS es especialmente seductora y mucho podría especularse sobre una eventual disminución del número de elementos de reemplazo, con la consiguiente simplificación de la reducida S' y de su tabla de valores, pero es preciso indicar que el camino está totalmente cerrado en esa dirección: apelar al reemplazo por un número de individuos menor que 2^k significaría violar el principio mismo de BS y estar aplicando un procedimiento decisorio radicalmente distinto, basado en otros principios. Halberstadt, Modern Logic, §38, logra una abreviación del estilo mencionado, pero sólo para condicionales en cuyo antecedente figuren "two or more existentially quantified premises and one or more universally quantified premises", suponiéndose además, por los ejemplos que utiliza, que han de tener por consecuente una sola cuantificación (*). Las limitaciones son tan evidentes - ni siquiera basta para resolver fórmulas como '$(\exists x)fx \supset (x)fx$' o '$(x)fx \vee (x)fx . \supset . (x)(fx \vee gx)$' - que no es posible considerar como abreviación real de BS la variante de Halberstadt.

f) El procedimiento BS, a pesar de su claridad y facilidad de enseñanza, ofrece, como se ha visto en los incisos anteriores, serios reparos que reducen en grado apreciable las posibilidades de su aplicación.

(*) Uno de los ejemplos que incluye hace pensar que también pueden tratarse abreviadamente condicionales en cuyo antecedente figuren sólo dos o más E-cuantificaciones.

C A P I T U L O VII

El procedimiento decisorio de Kleene

1. El Profesor Stephen Cole Kleene, en su Introduction to Metamathematics, § 36, explica lo que él denomina un "finitary valuation procedure" para determinar cuáles fórmulas son 1-verdaderas "whatever predicate each predicate letter represents, and also, in view of the generality interpretation of the free individual variables, whatever object from the object domain each free individual variable represents" (*). Como se verá en lo que sigue, la idea en que se basa este procedimiento se halla estrechamente vinculada con el principio de aquél de Bernays y Schönfinkel estudiado en el capítulo anterior.

Es preciso, para poner en marcha el procedimiento de Kleene, elegir antes que nada un entero positivo r, que corresponde al número de dintintos objetos que constituyen el dominio de la variable o de las variables individuales de una fórmula dada, los mismos que llevarán los números 1,2,........,r. Estos números, como es obvio, serán los valores que asumen dichas variables. Una vez fijado r se construirá una tabla de valores para la fórmula S (cuya validez se investiga) en la forma que luego se explicará, y si, para un r dado, S resulta c-válida en ciertas condiciones, también será válida o lógicamente verdadera en un dominio compuesto de r objetos, o, como también se dice, r-válida.

¿Cuándo, entonces, será 1-verdadera en el amplio sentido en que este término se ha venido usando hasta aquí? ¿Cuando $r = \infty$? Ello no es posible, no sólo por la imposibilidad de construir la tabla respectiva, sino también porque en ese caso el procedimiento de Kleene no sería "finitary", tal como él mismo lo caracteri-

---

(*) Kleene, Metamathematics, p. 168.

za. La solución obvia está en agregar el enunciado debido a Bernays y Schönfinkel, ya conocido (*), valedero únicamente para fórmulas predicativas monádicas de primer grado, de acuerdo al cual una de éstas será universalmente válida o válida para un dominio cualquiera si y sólo si lo es en o para un dominio con 2^k elementos (k = número de letras predicativas) (**).

2. La idea básica del procedimiento de Kleene es novedosa y muy interesante. Una fórmula predicativa elemental n-ádica (+) difiere de una letra proposicional "in that it represents not a proposition but rather a propositional function of n variables, i.e., a function which takes a proposition as value for each set of values of the attached variables" (++). Es decir, que '$\alpha(x,y)$', por ejemplo, es una función diádica que adopta como valor, para cada par de valores de 'x' e 'y', una proposición, y '$\alpha(x)$' una función monádica cuyo valor, para cada valor de 'x', es también una proposición. De manera que una fórmula predicativa elemental no puede ser substituída directamente por V o F (valores proposicionales), sino por funciones de n variables sobre un dominio $\{1,2......,r\}$, y únicamente las proposiciones que adopten como valor dichas funciones para los diversos valores de sus argumentos

---

(*) Véase VI. 3, supra.
(**) Como toda referencia a un dominio cualquiera (que puede ser infinito) es inadmisible tratándose de procedimientos finitarios, "which employ only intuitively conceivable objects and performable processes" (op. cit., p. 63), es explicable que nada aparezca en Metamathematics acerca de este añadido, sobre todo si "to stablish metamathematically the consistency of the predicate calculus" (op. cit., p. 168), que es lo que Kleene persigue a esta altura de su libro, le basta la noción de r-validez. Pero nada impide, abandonando el finitarismo y recurriendo al teorema de Bernays y Schönfinkel, aplicar el procedimiento de Kleene, con las naturales adiciones, para determinar la validez universal de una fórmula; y sólo en este sentido amplio se tratará de aquél en las secciones siguientes.
(+) "....a predicate letter with n attached variables..." (op. cit., p. 168).
(++) Loc. cit.

podrán a su vez adoptar los valores V o F. Kleene denomina a estas funciones "logical functions of n variables over the domain of r objects (*).

Para cada fórmula elemental habrá entonces $2^{(r^n)}$ funciones de esta naturaleza. Como en lo sucesivo sólo se tratará de letras predicativas monádicas (n = 1), a cada fórmula predicativa elemental corresponderán $2^{(r^1)}$, esto es, 2^r funciones lógicas o l-funciones l_i (x), como serán llamadas a partir de aquí, que adoptarán el valor V o F para cada uno de los valores 1,......,r, que asuma 'x' (**).

Ahora bien: el procedimiento de Kleene consiste en la confección de una tabla de valores para S, que representa una fórmula monádica de primer grado, en la que pueden figurar también letras proposicionales y/o variables libres y/o constantes individuales (+). Habrá en dicha tabla columnas de referencia para las letras proposicionales, para las variables libres y para cada una de las fórmulas elementales que S exhiba. Los valores asignados a las letras proposicionales serán, como de costumbre, V y F; en la columna de una variable libre aparecerán los 2^k elementos del dominio requerido para la validez universal de S; en la de una constante individual sólo un elemento de dicho dominio; y en la de una fórmula elemental las $2^{(2^k)}$ l-funciones que le correspondan. Antes de proceder a la consumación de la tabla es preciso determinar, mediante subtablas ad hoc, los valores de las l_i(x) en función de los 2^k valores (elementos) que constituyan el dominio de 'x'.

(*) Op. cit., p. 169.
(**) Como en todo lo que sigue sólo se tratará de la validez universal, r será igual a 2^k, y, por tanto, el número de l-funciones para cada fórmula monádica elemental será $2^{(2^k)}$.
(+) En todo lo concerniente a la aplicación del procedimiento de Kleene a fórmulas con constantes individuales y las reglas pertinentes, la responsabilidad recae exclusivamente en el autor de esta tesis.

Se establecen los valores de cada línea o arreglo con el auxilio de las siguientes instrucciones:

a) Si en una línea o arreglo, '$l_i(x)$' es V para todos los valores que asume 'x', '$(x)\alpha x$' es también V en dicha línea, pero si '$l_i(x)$' es F por lo menos para un valor de 'x', '$l_i(2)$' por ejemplo, '$(x)\alpha x$' es F.

b) Si en una línea o arreglo, '$l_i(x)$' es V por lo menos para un valor de 'x', '$(\exists x)\alpha x$' es V en dicha línea, pero si '$l_i(x)$' es F para todos los valores de 'x', '$(\exists x)\alpha x$' es F en dicha línea.

c) Si S exhibe una fórmula elemental 'αx' y una fórmula elemental con constante individual 'αj', el valor de esta última, en una línea cualquiera, es el que tenga '$l_i(j)$' en la subtabla respectiva. Si S exhibe 'αj' pero no 'αx', sólo le corresponderán a 'αj' dos funciones $l_1(j)$ y $l_2(j)$, V y F, respectivamente.

d) Si '$\emptyset x$' es el operando de una cuantificación básica y en él aparecen por lo menos una fórmula predicativa elemental y una conectiva, '$(x)\emptyset x$' es V en una línea o arreglo si y sólo si, substituídos los componentes '$\alpha_i x$' por las l-funciones que les corresponden en dicha línea, '$\emptyset x$' es V para todos los valores que en aquéllas puede asumir 'x', y '$(\exists x)\emptyset x$' es V si y sólo si '$\emptyset x$' es V por lo menos para una de las posibles asignaciones de valores a las respectivas l-funciones. Si en '$\emptyset x$' aparecen letras proposicionales u otros componentes que no sean fórmulas elementales, la situación no cambia, teniendo en cuenta que los valores para cada uno de estos componentes se asigna en dicha línea de la manera usual.

S es l-verdadera o universalmente válida si y sólo si todas las líneas o arreglos de su tabla son V.

La sección siguiente está dedicada a la solución, efectuada con todo detalle, de varios ejemplos, y es de confiar que lo explicado en ella baste para aclarar suficientemente la técnica decisoria, ampliada para la validez universal, debida al Profesor Kleene.

3\. I) Se trata, em este primer ejemplo, de saber si la fórmula

$$(x)fx \supset (\exists x)fx \qquad (S)$$

es o no válida. Para ello es necesario, de acuerdo a lo dicho, confeccionar su tabla, pero antes es preciso establecer los valores que adoptan las 1-funciones que han de aparecer en la columna de referencia para el dominio $\{1,2,......,r\}$.

En S aparecen dos cuantificaciones básicas, pero sólo una fórmula elemental, que es 'fx'. A 'fx' corresponden 2^r funciones $1_i(x)$ que adoptarán los valores V o F para cada valor $1,2,......,r$, que asuma 'x'. De acuerdo al teorema de Bernays y Schönfinkel, si se quiere determinar la validez o 1-verdad de S es necesario que $r = 2^k$, donde k, como se convino, es el número de letras predicativas que aparecen en S. Como en este ejemplo $k = 1$, $r = 2^1 = 2$, y se tendrán $2^r = 2^2 = 4$ funciones $1_i(x)$, para las cuales debe construirse la siguiente subtabla:

x	$1_1(x)$	$1_2(x)$	$1_3(x)$	$1_4(x)$
1	V	V	F	F
2	V	F	V	F

(1)

Como no hay otras 1-funciones ni existen otros componentes de S que deban figurar en la columna de referencia de la tabla final o decisoria, ésta será

fx	$(x)fx \supset (\exists x)fx$
$1_1(x)$	
$1_2(x)$	
$1_3(x)$	
$1_4(x)$	

La V o F de cada uno de los arreglos se determina teniendo siempre en cuenta la subtabla (i), como se aprecia en seguida. Examínese el primer arreglo. '$l_1(x)$' es V tanto para x = 1 como para x = 2 en dicha subtabla. Por lo tanto 'fx' es V para todo valor de 'x' en el dominio {1,2}, y tanto '(x)fx' como '(∃x)fx' son entonces V de acuerdo a 2, supra, S se reduce así en el primer arreglo a V ⊃ V y finalmente a V.

En el segundo arreglo se aprecia que '$l_2(x)$' es V cuando x = 1, pero F cuando x = 2. '(x)fx' será F, de acuerdo a lo enunciado en la sección 2, supra, y '(∃x)fx' V. El arreglo tendrá en consecuencia el valor F ⊃ V, esto es, V. El tercer arreglo es igual que el segundo, y en el cuarto la única mudanza es la falsedad del consecuente de S, puesto que al no ser verdadera '$l_4(x)$' para ningún valor de 'x', '(∃x)fx' tendría que ser F, con lo cual el valor del arreglo es F ⊃ F, esto es, V.

La tabla final de S, una vez efectuada, es

fx	(x)fx	⊃	(∃x)fx
$l_1(x)$	V	V	V
$l_2(x)$	F	V	V
$l_3(x)$	F	V	V
$l_4(x)$	F	V	F

.

Como todos los arreglos son V, S es válida o l-verdadera.

II) El segundo ejemplo consiste en la determinación de la l-verdad de una fórmula monádica en la que aparecen letras proposicionales.

$$(x)(fx \supset p) . \equiv . (\exists x)fx \supset p \qquad S$$

'p' puede asumir dos valores: V y F. 'fx' debe tener 2^r l-funciones substitutorias, y como $r = 2^1$, éstas serán cuatro. La tabla tiene entonces 2 x 4 arreglos y, una vez resuelta, es la siguiente:

p	fx	$(x)(fx \supset p)$	$\equiv$	$.(\exists x)fx$	$\supset$	p
V	$l_1(x)$	V	V	V	V	V
V	$l_2(x)$	V	V	V	V	V
V	$l_3(x)$	V	V	V	V	V
V	$l_4(x)$	V	V	F	V	V
F	$l_1(x)$	F	V	V	F	F
F	$l_2(x)$	F	V	V	F	F
F	$l_3(x)$	F	V	V	F	F
F	$l_4(x)$	V	V	F	V	F

No hace falta, para la debida comprensión de esta tabla, sino el análisis del primer y sexto arreglo.

a) La subtabla de las l-funciones substitutorias de 'fx' es la misma que la del arreglo anterior:

x	$l_1(x)$	$l_2(x)$	$l_3(x)$	$l_4(x)$
1	V	V	F	F
2	V	F	V	F

Se establece el valor de '$(x)(fx \supset p)$' en el primer arreglo construyendo una tabla auxiliar para '$(fx \supset p)$', una vez reemplazada 'fx' por la l-función que le corresponde en ese arreglo, como se hace en seguida:

$l_1(x)$	p	$l_1(x) \supset p$
V	V	V
V	V	V

TA(i)

Los valores de $l_1(x)$ son los de la respectiva subtabla y el de 'p' el del arreglo correspondiente, en este caso el primero. Como '$(fx \supset p)$' resulta verdadero en todos sus arreglos, '$(x)(fx \supset p)$' es V en el primer arreglo de la tabla principal.

'$(\exists x)fx$' será también V pues $l_1(x)$ es V para los dos valores posibles de 'x', como se aprecia en la subtabla de dicha función.

La expresión 'V. ≡ .V ⊃ V' a que se ha reducido S en este arreglo da V como resultado final.

b) La tabla auxiliar para '(x)(fx ⊃ p)' en el sexto arreglo es

$1_2(x)$	p	$1_2(x) \supset p$
V	F	F
F	F	V

y, como se aprecia en ella que existe por lo menos una línea que va a parar a F, '(x)(fx ⊃ p)' es F. '(∃x)fx' es V. Resolviendo la expresión 'F. ≡ .V ⊃ F', reducida de S, se llega a V, como en el primer arreglo.

El análisis de las seis líneas restantes es similar y la tabla final arroja V en todos sus arreglos. S, por tanto, es 1-verdadera.

III) Se va a decidir a continuación acerca de la validez o 1-verdad de una fórmula compuesta de cuantificaciones básicas, letras proposicionales y variables libres. Sea S la fórmula

$$(x)(p \supset fx) . \vee . \sim fy . p \;.$$

Su correspondiente tabla exhibirá 4 x 2 x 2 arreglos, pues 'fx' se habrá de substituir por 2^2 1-funciones, 'p' por V y F, e 'y' por 1 y 2, los dos únicos elementos del dominio r, de manera que su estructura es

y	p	f ( )	(x)(p ⊃ fx). v .~fy.p
1	V	l_1( )	
1	V	l_2( )	
1	V	l_3( )	
1	V	l_4( )	
1	F	l_1( )	
1	F	l_2( )	
1	F	l_3( )	
1	F	l_4( )	
2	V	l_1( )	
2	V	l_2( )	
2	V	l_3( )	
2	V	l_4( )	
2	F	l_1( )	
2	F	l_2( )	
2	F	l_3( )	
2	F	l_4( )	

a) El análisis de '(p ⊃ fx)' en el primer arreglo, utilizando para las l-funciones la misma subtabla usada en los ejemplos anteriores, conduce a la siguiente tabla auxiliar:

p	$l_1(x)$	p ⊃ $l_1(x)$
V	V	V
V	V	V

'(x)(p ⊃ fx)' es por lo tanto V. '~fy', por su parte, debe ser reemplazada por '~l_1(1)' y será entonces F, puesto que, en virtud de la subtabla respectiva, 'l_1(1)' es V. Así queda S reducida a la expresión 'V. v .F.V', cuyo resultado final es V.

b) En el segundo arreglo '(x)(p ⊃ fx)' es F, puesto que, en la tabla auxiliar respectiva, el arreglo 'p ⊃ l_2(2)' es F, y '~fy' también lo es, ya que, siendo V 'l_2(1)', su negación será F. La reducida de S, 'F.v.F.V', resulta ser a la postre F.

No es necesario proseguir, pues al aparecer un arreglo F en su tabla decisoria final, S no puede ser válida.

IV) $(x)(fx \supset fa).(\exists x)fx. \supset .fa$ S

La constante individual 'a' que aparece en S representa uno cualquiera de los elementos del dominio {1,2} requerido para determinar la validez universal de S. La tabla tendrá sólo cuatro arreglos, pues el número de 1-funciones correspondiente a 'f( )' es 2^{2^k}, y, ya completa, es la siguiente:

a	f ( )	(x)(fx ⊃ fa)	.	(∃x)fx	. ⊃ .	fa
1	$1_1( )$	V	V	V	V	V
1	$1_2( )$	V	V	V	V	V
1	$1_3( )$	F	F	V	V	F
1	$1_4( )$	V	F	F	V	F

a) En el primer arreglo, utilizando para las 1-funciones la misma subtabla de los tres ejemplos ya resueltos, y haciendo $a = 1$ (aunque nada obsta para hacer $a = 2$, pues el resultado final no varía), se tiene

$1_1(x)$	$1_2(a)$	$fx \supset fa$
V	V	V
V	V	V

,

y, por tanto, '$(x)(fx \supset fa)$', '$(\exists x)fx$' y 'fa' son V.

b) En el segundo arreglo la tabla auxiliar es

$1_2(x)$	$1_2(a)$	$fx \supset fa$
V	V	V
F	V	V

y la línea resulta idéntica a la primera.

c) En el tercero la tabla auxiliar es

$1_3(x)$	$1_3(a)$	$fx \supset fa$
F	F	V
V	F	F

y sólo '$(\exists x)fx$' es V.

d) A diferencia del anterior, en el cuarto arreglo sólo '$(x)(fx \supset fa)$' es V, de acuerdo a la tabla

$l_4(x)$	$l_4(a)$	$fx \supset fa$
F	F	V
F	F	V .

Como ninguna línea ha resuelto F, S es válida.

4. No parece ser sólo cosa del azar que el único ejemplo que presenta Kleene en su obra (*) y los que aparecen en otro texto donde se adopta y explica su procedimiento (**) tengan una sola letra predicativa; y es de suponer que tal hecho se debe a la insopechada dimensión que alcanza la respectiva tabla decisoria cuando dichas letras son más numerosas, puesto que el número de 1-funciones que substituyen a una fórmula elemental interviene decisivamente, <u>como factor</u>, en el descomunal incremento de la cantidad de arreglos.

Considérese, por ejemplo, la tabla de una fórmula tan poco complicada como

$$(x)fx \vee (x)gx . \supset . (x)(fx \vee gx) \ . \qquad S$$

El número de funciones $l_i(x)$ que corresponden a cada fórmula elemental asciende a $2^{2^k} = 2^{2^2} = 16$. Como S exhibe dos fórmulas elementales, cada una de éstas será reemplazada por 16 funciones $l_i(x)$, y la tabla poseerá 16 x 16 arreglos, dispuestos esquemáticamente en la forma que sigue:

(*) Es el que aparece como ejemplo III en la sección anterior.
(**) Stoll, Sets, § 2.8.

fx	gx	$(x)fx \vee (x)gx .\supset. (x)(fx \vee gx)$
$l_1(x)$	$l_1(x)$	
.	.	
.	.	
.	.	
.	.	
$l_1(x)$	$l_{16}(x)$	
$l_2(x)$	$l_1(x)$	
.	.	
.	.	
.	.	
.	.	
$l_2(x)$	$l_{16}(x)$	
$l_3(x)$	$l_1(x)$	
.	.	
.	.	
.	.	
.	.	
$l_3(x)$	$l_{16}(x)$	
.	.	
.	.	
.	.	
.	.	
$l_{16}(x)$	$l_1(x)$	
.	.	
.	.	
.	.	
.	.	
$l_{16}(x)$	$l_{16}(x)$	

Los valores de las l-funciones se establecen en la subtabla siguiente, donde 'x' asume los valores del dominio {1,2,3,4}, ya que $r = 2^k = 2^2$.

x	$l_1(x)$	$l_2(x)$	$l_3(x)$	$l_4(x)$	$l_5(x)$	$l_6(x)$	$l_7(x)$	$l_8(x)$
1	V	V	V	V	V	V	V	V
2	V	V	V	V	F	F	F	F
3	V	V	F	F	V	V	F	F
4	V	F	V	F	V	F	V	F

x	$l_9(x)$	$l_{10}(x)$	$l_{11}(x)$	$l_{12}(x)$	$l_{13}(x)$	$l_{14}(x)$	$l_{15}(x)$	$l_{16}(x)$
1	F	F	F	F	F	F	F	F
2	V	V	V	V	F	F	F	F
3	V	V	F	F	V	V	F	F
4	V	F	V	F	V	F	V	F

a) En el primer arreglo la tabla auxiliar para hallar el valor de '(x)(fx ∨ gx)' es

$l_1(x)$	fx ∨ gx
V	V
V	V
V	V
V	V

Como todos los arreglos son V, '(x)(fx ∨ gx)' es V. '(x)fx' y '(x)gx' son, a su vez, V, pues $l_1(x)$ es V para todos los valores de 'x'. El resultado final de la línea no puede ser otro que V.

b) En el trigésimo segundo arreglo las cosas varían: '(x)fx' es F, pues $l_2(4)$ es F, y como $l_{16}(x)$ es F para todos los valores de 'x', '(x)gx' es también F. '(x)(fx ∨ gx)', para no quedar atrás, es también F, como resulta de la respectiva tabla auxiliar

$l_2(x)$	$l_{16}(x)$	fx ∨ gx
V	F	V
V	F	V
V	F	V
F	F	F

No es preciso continuar: lo hecho y lo que falta por hacer pone de manifiesto la laboriosidad suma del procedimiento de Kleene, ya a partir de escasamente dos letras predicativas, y sin considerar letras proposicionales ni fórmulas elementales con variables libres (*).

Nadie duda que, como afirma el propio Kleene, "there are usually shortcuts that can be used in ascertaining the table for a formula, so that it is not necessary to go through the whole calculation procedure separately for every entry of the table" (**). Un ejemplo que ilustra la manera de evitar el análisis de la tabla decisoria final arreglo por arreglo es el que ofrece Stoll (+) para probar que

$$(x)fx \vee (x)gx . \supset .(x)(fx \vee gx) \qquad S$$

es una fórmula 1-verdadera. Supóngase que el consecuente toma el valor F para $1_1(x)$ y $1_2(x)$. En este caso 'fx ∨ gx' tendrá forzosamente una línea F y, por tanto, 'fx' y 'gx' serán también F por lo menos en un caso, de lo que se sigue necesariamente que'(x)fx' y '(x)gx' han de ser a su vez F. De esta manera el antecedente será entonces F siempre que lo sea el consecuente, y ninguna línea o arreglo del condicional podrá ser F. S, en consecuencia,es válido.

Téngase presente,sin embargo,que el apelar a atajos o a razonamientos adicionales, como se dijo a propósito de QL, arrebatarían al procedimiento de Kleene su carácter decisorio o algorítmico. El propio Stoll, que refiriéndose a estas abreviaciones afirma que "the ease with which the validity of some formulas can be established may come as a surprise" (++), tiene que admitir que "it is obvious that to establish the validity of some formulas, truth tables must give way to reasoning processes"(*+).

(*) Si en el ejemplo III de la sección anterior se substituyera en S la fórmula elemental '~fy' por '~gy', la tabla tendría 16 x 16 x 2 x 2 = 1024 arreglos, y para decidir sobre la validez de un silogismo categórico cualquiera se requerirá una tabla con $(2^8)^3 = (256)^3$ líneas o arreglos, puesto que deberán emplearse 2^8 1-funciones por cada letra predicativa.
(**) Ibid., p. 171.
(+) Op. cit., p. 110.
(++) Loc. cit.
(*+) Op. cit., p. 109.

Y, en todo caso, tanto "shortcuts" como "reasoning processes" son de utilidad práctica sólo en "some formulas", por fuerza de ostensible sencillez.

5. Luego de lo expuesto en las secciones anteriores, el procedimiento de Kleene, ampliado para la validez universal, da lugar a las siguientes consideraciones en lo que se relaciona con la finalidad de esta tesis:

a) La agobiante secuela de operaciones que sus reglas prescriben no hacen de esta técnica un método realmente utilizable o práctico.

b) Los posibles atajos o abreviaciones a que hace referencia su autor - y olvidando el hecho que privan al método de su carácter algorítmico- son aplicables en un campo tan estrecho de fórmulas que no alteran lo dicho acerca de su excesiva prolijidad.

c) Cabe sin embargo destacar entre sus méritos la ingeniosa concepción de las l-funciones, que le adjudica una genuina novedad respecto a los demás métodos estudiados en este trabajo; su tratamiento de fórmulas con variables individuales libres, en el que no se requiere su cierre previo; y su potencial aplicabilidad a fórmulas que ostenten constantes individuales.

C A P I T U L O VIII

El procedimiento FH

1. En los capítulos anteriores se han estudiado varios procedimientos decisorios para fórmulas monádicas de primer grado, que, con todas las objeciones que puedan hacérseles, son, salvo tal vez el de Kleene, perfectamente utilizables cuando se trate de decidir acerca de la validez o 1-verdad de una fórmula de esa clase.

El autor de esta tesis, sin embargo, propone en este capítulo un procedimiento con el mismo objeto, construído alrededor de una demostración de Herbrand (sustentada a su vez en otra de Bernays y Schönfinkel), que a su juicio, y si no yerra, tiene sobre los ya mencionados evidentes ventajas, en vista de la facilidad de sus reglas, del reducido número de pasos que integran el proceso decisorio que prescribe y del hecho de llevar siempre, durante el curso de éste, de una fórmula a otra cada vez más sencilla.

En lo que sigue se expondrán las reglas básicas de dicho procedimiento, denominado FH a partir de aquí, acompañadas de ejemplos ilustrativos, continuando luego con la exposición de un algoritmo de reducción de fórmulas complejas a fórmulas básicas (lo que permite extender la aplicación del procedimiento básico a toda clase de fórmulas monádicas de primer grado) y de una regla más, que hace llegar dicha aplicación a fórmulas con constantes individuales. Concluye el capítulo con la justificación de FH y la extensión de éste a todas las fórmulas predicativas n-ádicas de primer grado que sean reducibles a formas normales prenex con prefijo propio.

2. Sea S una fórmula básica cerrada cualquiera con letras pre

dicativas monádicas libres, con o sin letras proposicionales (*) y sin igualdad. Para saber si se trata o no de una fórmula válida o l-verdadera deberán cumplirse, en el orden que se indica, y cuando sea necesario, las siguientes instrucciones:

R1. Obtener, mediante conocidas reglas de transformación, una fórmula equivalente S' en que sólo aparezcan, fuera de las cuantificaciones, las conectivas '.' y/o '$\vee$' y/o '$\sim$', internada ésta última. Si ello es posible, conviene simplificar, aunque no es imperativo, la fórmula S' así alcanzada.

R2. Borrar los r U-cuantificadores que S' exhibe, y substituir las variables individuales de los respectivos operandos por r letras o constantes de substitución a_1, a_2,......,a_r, utilizando una distinta en cada U-operando.

R3. Borrar los E-cuantificadores de S' y substituir cada E-operando '$\emptyset x$' por la disyunción de r miembros '$\emptyset a_1 \vee \emptyset a_2 \vee \ldots\ldots \vee \emptyset a_r$'. Si $r = 0$, esto es, si S' no exhibe U-cuantificadores, cada '$\emptyset x$' se substituirá por '$\emptyset a$'.En la práctica, una vez establecido r, R2 y R3 se aplican simultáneamente.

R4. Dejar inalteradas las letras proposicionales que S' exhibe.

R5. Determinar, mediante el método tabular o cualquier otro,si el esquema molecular o "truth-function" E, obtenido luego de aplicar las reglas anteriores, es o no tautológico.

R6. S es l-verdadera si y sólo si E es tautológico.

(*) Para efectos de este procedimiento decisorio la presencia de letras proposicionales dentro de los operandos no afecta el carácter básico de las cuantificaciones (véase I.6, inciso g, supra). Las fórmulas elementales con constante individual tampoco alteran, al figurar en ellas, dicho carácter, pero para obtenerse una decisión acerca de una fórmula que las exhiba se requiere una regla adicional (véase la sección 5, infra).

He aquí algunos ejemplos que ilustran debidamente la aplicación de estas reglas.

I) $$(x)(fx \supset gx).(x)(hx \supset \sim gx). \supset .(x)(hx \supset \sim fx) \qquad S$$

Reduciendo a S':

$$\overline{(x)(fx \supset gx).(x)(hx \supset \sim gx)} \vee (x)(hx \supset \sim fx)$$

$$\sim(x)(fx \supset gx) \vee \sim(x)(hx \supset \sim gx) \vee (x)(hx \supset \sim fx)$$

$$(\exists x)(fx.\sim gx) \vee (\exists x)(hx.gx) \vee (x)(\sim hx \vee \sim fx) \qquad S'(*)$$

Como no hay sino un U-cuantificador, sólo habrá una constante de substitución. E, por lo tanto, es

$$(fa.\sim ga) \vee (ha.ga) \vee \sim ha \vee \sim fa$$

y, simplificada,

$$\sim ga \vee ga \vee \sim fa \vee \sim ha \ .$$

Como es patentemente tautológica, S es válida o l-verdadera.

II) $$(\exists x)fx.(x)(fx \supset \sim gx).(x)(fx \supset hx). \supset .(\exists x)(hx.\sim gx) \qquad S$$

Reduciendo a S':

$$\sim(\exists x)fx \vee \sim(x)(fx \supset \sim gx) \vee \sim(x)(fx \supset hx) \vee (\exists x)(hx.\sim gx)$$

$$(x)\sim fx \vee (\exists x)(fx.gx) \vee (\exists x)(fx.\sim hx) \vee (\exists x)(hx.\sim gx)$$

Aquí, como en el ejemplo anterior, sólo debe usarse una constante de substitución, y E resulta ser

$$\sim fa \vee (fa.ga) \vee (fa.\sim ha) \vee (ha.\sim ga).$$

Como al simplificar este esquema obtenemos

$$\sim fa \vee ga \vee \sim ha \vee \sim ga \ ,$$

(*) Al internar '$\sim$' vale la pena simplificar inmediatamente el operando a fin de permitir luego, tan pronto como se obtenga E, el empleo de las reglas de absorción. Dada la especial configuración de E, dicho empleo es muy frecuente, y evita de ordinario la confección de tablas de valores.

que es tautológico, S es válida.

III) $(x)(fx \supset gx).p. \supset .(\exists x)(gx \vee hx)$ S

Reduciendo a S':

$\sim(x)(fx \supset gx) \vee \sim p \vee (\exists x)(gx \vee hx)$

$(\exists x)(fx.\sim gx) \vee \sim p \vee (\exists x)(gx \vee hx)$ S'

No figuran en S' U-cuantificadores, de modo que r = 0. De acuerdo a R3, se utilizará una sola constante de substitución, y E será

$(fa.\sim ga) \vee \sim p \vee ga \vee ha$,

o, simplificada,

$fa \vee \sim p \vee ga \vee ha$,

en manera alguna tautológica. S no es válida.

IV) $(\exists x)fx. \supset .(\exists x)(fx \supset p) \vee (x)(fx \vee p)$ S

$(x)\sim fx \vee (\exists x)(fx \supset p) \vee (x)(fx \vee p)$ S'

Aquí r = 2, y la E-cuantificación debe ser substituída por una disyunción. Con 'p' no hay problemas.

$\sim fa \vee (fa \supset p) \vee (fb \supset p) \vee fb \vee p$ E

E, simplificada, es

$\sim fa \vee p \vee \sim fb \vee fb$,

palmariamente tautológica. S es válida.

V) $(\exists x)(fx.p). \supset .(\exists x)(gx. \supset .fx.p)$ S(*)

$(x)(\sim fx \vee \sim p) \vee (\exists x)(\sim gx. \vee .fx.p)$ S'

$\sim fa \vee \sim p \vee \sim ga \vee (fa.p)$ E

$\sim fa \vee \sim p \vee \sim ga \vee p$ E(simplificada)

(*) De Quine, Métodos, p. 265, apenas modificado, y resuelto mediante los tres procedimientos de este autor en las secciones II, 8 (ejemplo V), III.6 (ejemplo II), y IV. 7 (ejemplo I).

Se ha llegado a un esquema molecular tautológico y S es válida.

VI) $p . \supset . q . (x)(fx \supset \sim gx) : q \supset (\exists x)(fx . gx \vee hx) : \supset : p . \supset (\exists x)(hx . \sim gx)$ S(*)

Reduciendo a S':

$$\overline{p . q . (x)(fx \supset \sim gx)} . \vee . \overline{q . (\exists x)(fx . gx \vee hx)} . \vee . \sim p . \vee . (\exists x)(hx . \sim gx)$$

$$p . \sim q \vee (\exists x)(fx . gx) . \vee . q . (x)(\sim fx . \vee . \sim gx . \sim hx) . \vee . \sim p . \vee . (\exists x)(hx . \sim gx) \quad S'$$

S' equivale a

$$\sim q . \vee . (\exists x)(fx . gx) . \vee . (x)(\sim fx . \vee . \sim gx . \sim hx) . \vee . \sim p . \vee . (\exists x)(hx . \sim gx) .$$

E será

$$\sim q \vee (fa . ga) \vee \sim fa \vee (\sim ga . \sim ha) \vee \sim p \vee (ha . \sim ga) ,$$

y, simplificada,

$$\sim q \vee ga \vee \sim fa \vee \sim ha \vee \sim p \vee \sim ga .$$

Como es tautológica a simple vista, S es válida.

3. El procedimiento FH es aplicable también a cualquier fórmula que no sea básica, pues, como se probará en la sección 6, infra, toda fórmula monádica cerrada es reducible a otra básica equivalente. Una fórmula monádica cerrada no básica cualquiera S_1 es 1-verdadera si y sólo si lo es una fórmula básica equivalente S. De manera que, dada S_1, deberá obtenerse primero su equivalente S y someter luego a ésta al procedimiento FH ya indicado.

La reducción de S_1 a S se logra mediante la aplicación del algoritmo de Behmann, ya mencionado a propósito de QM, que se expone detalladamente en seguida.

Sea el orden de un cuantificador '(Qx)' el número de cuantificadores y de variables que no sean las de cuantificación que a-

(*) De Quine, Métodos, p. 171, y resuelta mediante QM en IV. 5 (ejemplo III), supra.

parecen dentro de su respectivo operando. Dada una fórmula cerrada S_1 en la que aparecen cuantificaciones no básicas, es decir, una que exhibe cuantificadores de orden n ($n \geq 1$), debe procederse a internarlos, de manera tal que todos ellos sean de orden cero. A ese fin se destinan las siguientes reglas, que se emplearán tantas veces como sea necesario y en la forma que mejor convenga, si bien puede establecerse que debe empezarse en cada cuantificación por los cuantificadores de mínimo orden, prosiguiéndose luego con los de orden superior hasta lograr que la cuantificación sea básica.

1) Cuando el cuantificador de orden n ($n \geq 1$) es universal, el operando debe transformarse hasta obtener una fórmula predicativa abierta cuyas conectivas no sean otras que '.', '$\vee$' y '$\sim$' (internada). Se debe llegar así a uno de estos tres tipos de fórmula:

a) Conjunción de fórmulas elementales con variables individuales ligadas y cualquier otro tipo de fórmulas (letras proposicionales o cuantificaciones y fórmulas elementales con otras variables o constantes individuales). Se interna entonces el cuantificador distribuyéndolo sobre la conjunción.

b) Disyunción de fórmulas del mismo tipo que las caracterizadas en el inciso anterior. En este caso se reagrupan convenientemente los d-componentes y se interna el cuantificador de acuerdo a la respectiva regla.

c) Forma normal conjuntiva de fórmulas del mismo tipo que las caracterizadas en (a). Distribuyendo el cuantificador sobre la conjunción se obtiene una conjunción de fórmulas que habrán de ser, bien básicas, en cuyo caso el proceso de internamiento ha concluído, bien disyunciones de fórmulas de las consideradas en (b), debiendo entonces procederse en conformidad con dicho inciso.

2) Cuando el cuantificador es existencial, el procedimiento, teniendo en cuenta las reglas de distribución e internación propias de este tipo de cuantificador, es el mismo que el prescrito en (1), sólo que en vez de la forma normal conjuntiva mencionada en (c) se tratará de una forma normal disyuntiva.

3) Cuando todas las cuantificaciones de S_1 sean ya básicas se unificará la variable individual.

4) La fórmula S obtenida de este modo, equivalente a S_1, es básica, y puede ya ser sometida al procedimiento FH (*).

Ejemplos

I) $(\exists x)[fx \supset \sim[(\exists y)\sim fy . gx]]$ S_1

Reduciendo el operando:

$$(\exists x)[\sim fx \vee \sim(\exists y)\sim fy \vee \sim gx]$$

$$(\exists x)[\sim fx \vee \sim gx \vee (y)fy]$$

Internando los cuantificadores:

$$(\exists x)(\sim fx \vee \sim gx) \vee (y)fy$$

Unificando la variable (**):

$$(\exists x)(\sim fx \vee gx) \vee (x)fx \qquad S(*+)$$

El esquema E para la decisión es

$$\sim fa \vee \sim ga \vee fa \ ,$$

(*) Nada obsta para internar los cuantificadores, cuando ello es posible, abreviando algunos de los pasos prescritos e, incluso, pueden utilizarse reglas de internación tales como '$(x)(\phi x \supset p)$ eq. $(\exists x)\phi x \supset p$' y otras similares.

(**) La unificación de la variable, sin ser indispensable desde un punto de vista puramente práctico, redunda en beneficio de la claridad de la operación. En los ejemplos que siguen podrá omitirse cuando no exista peligro de confusión.

(*+) Obsérvese que la aplicación del algoritmo de reducción conduce a una fórmula S, idéntica a la reducida S' a la que se refiere R1.

trivialmente tautológico, y S_1 es válida.

II) $$(\exists x)(y)(fy.hx. \vee .gx.hx) \qquad S_1(*)$$

Internando el U-cuantificador:

$$(\exists x)[(y)fy.hx. \vee .gx.hx]$$

Distribuyendo el E-cuantificador:

$$(\exists x)[(y)fy.hx] \vee (\exists x)(gx.hx)$$

Internando nuevamente el E-cuantificador en el primer d-componente:

$$(y)fy.(\exists x)hx. \vee .(\exists x)(gx.hx)$$

Borrando los cuantificadores:

$$fa.ha. \vee .ga.ha$$

E no es tautológico y S_1 no es válida.

III) $$(\exists x)(fx,gx) \supset gy. \supset .(\exists x)fx: \supset :(\exists x)fx \vee (\exists x)(fx.gx) \qquad S_1(**)$$

Cerrando S_1:

$$(y)[(\exists x)(fx.gx) \supset gy. \supset .(\exists x)fx: \supset :(\exists x)fx \vee (\exists x)(fx.gx)]$$

Reduciendo el operando:

$$(y)[\overline{\overline{(\exists x)(fx.gx) \supset gy}} \vee (\exists x)fx \vee (\exists x)fx \vee (\exists x)(fx.gx)]$$

$$(y)[\sim(\exists x)(fx.gx) \vee gy.\sim(\exists x)fx. \vee .(\exists x)fx. \vee .(\exists x)(fx.gx)]$$

Introduciendo el U-cuantificador y simplificando:

$$(x)(\sim fx \vee \sim gx) \vee (y)gy \vee (\exists x)fx \vee (\exists x)(fx.gx)$$

Se obtiene ahora E, esto es,

$$\sim fa \vee \sim ga \vee gb \vee fa \vee fb \vee (fa.ga) \vee (fb.gb),$$

esquema molecular visiblemente tautológico. S_1 es válida.

(*) Resuelta mediante QM en IV.7 (ejemplo III), supra.
(**) De Quine, Métodos, p. 211.

IV) $(x)[fx.p.\supset.(\exists y)(gx.\supset.fy.p)]$ S_1(*)

Reduciendo tanto el U- como el E-operando e internando el E-cuantificador:

$$(x)[\overline{fx.p} \vee (\exists y)(\sim gx.\vee.fy.p)]$$

$$(x)[\sim fx \vee \sim p \vee \sim gx \vee (\exists y)fy.p]$$

Reordenando el U-operando, simplificando e internando '(x)':

$$(x)(\sim fx \vee \sim gx) \vee \sim p \vee (\exists y)fy$$

Suprimiendo los cuantificadores:

$$\sim fa \vee \sim ga \vee \sim p \vee fa$$

E es tautológico y S_1 válida.

V) $(\exists x)(\exists y)(z)(fx \supset gx.\supset.fy \supset gz)$ S_1(**)

Reduciendo el operando:

$$(\exists x)(\exists y)(z)(fx.\sim gx.\vee.\sim fy.\vee.gz)$$

Internando los cuantificadores y unificando la variable:

$$(\exists x)(fx.\sim gx) \vee (\exists x)\sim fx \vee (x)gx$$

Borrando los cuantificadores:

$$(fa.\sim ga) \vee \sim fa \vee ga \qquad E$$

E, simplificada, se reduce a

$$\sim ga \vee \sim fa \vee ga \ ,$$

evidentementemente tautológica. S_1 es válida.

VI) $(\exists x)(fx \supset gy).\supset.(z)(\exists x)(fx \supset gz)$ S_1(*+)

(*) De Quine, ibid., p. 265, resuelto en VI. 4 (ejemplo 5), supra, mediante el procedimiento de Bernays y Schönfinkel.
(**) De Kalish y Montague, Logic, p. 196, resuelto allí con otro procedimiento no decisorio.
(*+) De Copi, Symbolic Logic, p. 105, y resuelto mediante QM en IV. 7 (ejemplo IV), supra.

Cerrando S_1:

$$(y)[(\exists x)(fx \supset gy) . \supset . (z)(\exists x)(fx \supset gz)]$$

Eliminando '$\supset$' en los operandos:

$$(y)[\sim(\exists x)(\sim fx \vee gy) \vee (z)(\exists x)(\sim fx \vee gz)]$$

Internando los cuantificadores y unificando la variable:

$$(y)(x)(fx . \sim gy) \vee (\exists x)\sim fx \vee (z)gz$$

$$(x)fx . (x)\sim gx . \vee . (\exists x)\sim fx . \vee . (x)gx$$

Simplificando:

$$(x)\sim gx \vee (\exists x)\sim fx \vee (x)gx$$

Borrando los cuantificadores:

$$\sim ga \vee \sim fa \vee \sim fb \vee gb \qquad E$$

Ni E es tautológica ni S_1 válida.

VII) $$(\exists x)(y)(fx \equiv fy) \qquad S_1(*)$$

Reduciendo el operando e internando los cuantificadores:

$$(\exists x)(y)(\sim fx \vee fy . \sim fy \vee fx)$$

$$(\exists x)(\sim fx \vee (y)fy . (y)\sim fy \vee fx)$$

$$(\exists x)[\sim fx . (y)\sim fy . \vee . (y)fy . (y)\sim fy . \vee . (y)fy . fx]$$

$$(\exists x)\sim fx . (y)\sim fy . \vee . (y)(fy . \sim fy) . \vee . (y)fy . (\exists x)fx$$

Simplificando y unificando la variable:

$$(\exists x)\sim fx . (x)\sim fx . \vee . (x)fx . (\exists x)fx \qquad S'$$

E es

$$(\sim fa \vee \sim fb) . \sim fa . \vee . fb . (fa \vee fb) ,$$

que, simplificada, da origen a

$$\sim fa \vee fb ,$$

esquema en manera alguna tautológico. S_1, en consecuencia,

(*) Resuelta mediante QL en III. 6 (ejemplo IV), supra.

no es válida.

4. En la sección anterior se han resuelto casos de fórmulas complejas, incluyendo algunas en forma normal prenex. Tal como se dijo, es suficiente en estos casos reducir la fórmula dada a otra equivalente mediante el algoritmo que se describió, y aplicar luego el procedimiento básico FH.

Debe considerarse, sin embargo, como un caso particular, el de las formas normales prenex con prefijo propio, que si bien son solubles mediante la técnica general indicada, pueden también ser sometidas, sin reducción previa, al procedimiento básico, con sólo tener en cuenta que su operando debe reducirse a otro en que únicamente aparezcan las conectivas '.', '∨' y '∼' (internada) y que no debe unificarse la variable, para permitir así la identificación del cuantificador que corresponde a las que aparezcan en la matriz. La determinación de r se produce de la manera usual, mediante la inspección del prefijo.

Este particular caso de fórmulas no básicas tiene una interesante consecuencia práctica. Cuando una fórmula de esta especie tenga dispuestos sus cuantificadores de manera tal que su internación obligue a largas manipulaciones, pero que, por el contrario, pueda bastar una sencilla operación para llevarla a una forma normal prenex con prefijo propio, es perfectamente factible escoger esta última alternativa, casi siempre menos laboriosa.

<u>Ejemplos</u>

I) $(x)(y)(fy.gx. \supset .fy \vee p)$ S_1(*)

$(x)(y)(\sim fy \vee \sim gx \vee fy \vee p)$

$\sim fa \vee \sim gb \vee fa \vee p$ E

(*) Resuelto mediante QM en IV. 7 (ejemplo V), supra.

S_1 es válida.

II) $(x)(y)(\exists z)(fx \supset gz . \supset . fx \supset gy)$ S_1(*)

$(x)(y)(\exists z)(fx . \sim gz . \vee . \sim fx . \vee . gy)$

$(x)(y)(\exists z)(\sim gz \vee \sim fx \vee gy)$

$\sim ga \vee \sim gb \vee \sim fa \vee gb$ E

S_1 es válida.

III) $(x)(y)(\exists w)(\exists z)(fy \supset gz . \supset . fx \supset gw)$

$(x)(y)(\exists w)(\exists z)(fy . \sim gz . \vee . \sim fx \vee gw)$

$fa . (\sim ga \vee \sim gb) . \vee . \sim fb . \vee . (ga \vee gb)$ E

$(fa . \sim ga) \vee (fa . \sim gb) \vee \sim fb \vee ga \vee gb$

$fa \vee \sim fb \vee ga \vee gb$ E simplificado

S_1 no es válida, pues E no es tautológico.

IV) $(x)[(z)(fz \vee gx) . \supset . fy \vee gx]$ S_1

Cerrando S_1:

$(y)\{(x)[(z)(fz \vee gx) . \supset . fy \vee gx]\}$

Extrayendo '(z)', etc.

$(y)(x)(\exists z)(\sim fz . \sim gx . \vee . fy . \vee . gx)$

$(\sim fa \vee \sim fb) . \sim ga . \vee . fb . \vee . ga$ E

$\sim fa \vee \sim fb \vee fb \vee ga$

E es tautológico y S_1, por tanto, válida.

V) $(x)(fx . fy . \supset . gx) . p . (x)fx . \supset . gy$ S_1(**)

Cerrando S_1:

(*) Resuelto mediante QM en IV. 7 (ejemploII), supra, y mediante BS en VI. 4 (ejemplo IV), supra.
(**) De Quine, Logic, p. 5.

$$(y)[(x)(fx,fy. \supset .gx).p.(x)fx. \supset .gy]$$

Extrayendo los cuantificadores, reduciendo el operando, etc.:

$$(y)(\exists x)(\exists z)(fx.fy. \supset .gx{:}p{:}fz{:}\supset .gy)$$

$$(y)(\exists x)(\exists z)(\overline{fx.fy. \supset .gx} \vee \sim p \vee \sim fz \vee gy)$$

$$(y)(\exists x)(\exists z)(fx.fy.\sim gx. \vee .\sim p. \vee .\sim fz. \vee .gy)$$

$$(fa.\sim ga) \vee \sim p \vee \sim fa \vee ga \qquad E$$

$$fa \vee \sim p \vee \sim fa \vee ga$$

S_1 es válido, pues E es tautológico.

VI) $(\exists x)\{p \vee fx. \supset .\sim[(y)fy.gx]\}$ S_1

$$(\exists x)\{p \vee fx. \supset .\sim(y)fy \vee \sim gx\}$$

$$(\exists x)\{p \vee fx. \supset .(\exists y)\sim fy \vee \sim gx\}$$

$$(\exists x)(\exists y)(\sim p.\sim fx. \vee .\sim fy. \vee .\sim gx)$$

$$\sim p.\sim fa. \vee .\sim fa. \vee .\sim ga \qquad E$$

$$\sim fa \vee \sim ga \qquad \text{E simplificado}$$

E no es tautológico y S_1 no es válida.

VII) $(x)[fx.gy. \supset .(y)(fy.gy)]$ S_1(*)

$$(x)(y)(fx.gy. \supset .fy.gy)$$

$$(x)(y)(\sim fx. \vee .\sim gy. \vee .fy.gy)$$

$$\sim fa \vee \sim gb \vee (fb.gb) \qquad E$$

$$\sim fa \vee \sim gb \vee fb \qquad \text{E simplificado}$$

S_1 no es válida.

VIII) $(x)(y)[gx.hy. \supset .(z)(gz.hy)]$ S_1(**)

(*) Resuelto mediante QL en II. 6 (ejemplo III), supra.
(**) De Copi, Symbolic Logic, p. 105.

$$(x)(y)(z)(gx.hy. \supset .gz.hy)$$

$$(x)(y)(z)(\sim gx. \vee .\sim hy. \vee .gz.hy)$$

$$(x)(y)(z)(\sim gx \vee \sim hy \vee gz) \qquad E$$

$$\sim ga \vee \sim hb \vee gc$$

S_1 no es válida.

IX) $$(x)[\sim fx.\sim(y)\sim(fy.\sim gx)] \qquad S_1(*)$$

$$(x)[\sim fx.(\exists y)(fy.\sim gx)]$$

$$(x)(\exists y)(\sim fx.fy.\sim gx) \qquad E$$

$$\sim fa.fa.\sim ga$$

S_1 no es válida.

5. Los procedimientos decisorios estudiados en los capítulos anteriores, salvo los dos últimos, no toman en cuenta las fórmulas que exhiben constantes individuales, dentro o fuera de sus operandos. Es importante, sin embargo, que un procedimiento decisorio les sea aplicable, ya que sin ellas no es posible establecer la validez o invalidez de inferencias en que figuran proposiciones singulares, esto es, aquéllas en cuyas fórmulas aparecen nombres propios o de individuos inequívocamente especificados.

En esta tesis se considera básicas, en sentido lato, a fórmulas de esa especie, y las reglas del procedimiento FH permiten decidir acerca de su validez o invalidez con sólo una adición, que es la siguiente:

R3a. Si S' exhibe r cuantificadores universales y N constantes individuales, se debe substituir cada E-operando '$\emptyset x$', **una** vez borrados los E-cuantificadores, por la disyunción de N + r

---

(*) Propuesto para su solución en la pág. 2.25.

miembros '$\emptyset a_1 \vee \emptyset a_2 \vee \ldots\ldots \vee \emptyset a_{N+r}$'.

Es obvio que si S' no exhibe U-cuantificadores, la clase de las constantes de substitución es idéntica a la de las N constantes individuales que figuren en S', debiéndose proceder como de ordinario al reemplazo de los E-operandos. Si S', por el contrario, exhibe únicamente U-cuantificadores, la substitución de la variable individual se realiza como de costumbre, <u>pero sin utilizar para ello las constantes individuales que aparecen en S'</u>.

<u>Ejemplos</u>

I) $$(x)fx \supset ga . \supset . (\exists x)(fx \supset ga) \qquad S$$

$$(x)fx . \sim ga . \vee . (\exists x)(fx \supset ga) \qquad S'$$

El número de constantes de substitución es $N+r$, es decir, 2. E es entonces

$$fb . \sim ga . \vee . (\sim fa \vee ga) . \vee . (\sim fb \vee ga) ,$$

y, simplificada,

$$\sim ga \vee \sim fa \vee ga \vee \sim fb .$$

Como es tautológica, S es válida.

II) $$(x)(fx \supset gx) . \supset . fa \supset gb \qquad S$$

$$(\exists x)(fx . \sim gx) \vee \sim fa \vee gb \qquad S'$$

El número de constantes de substitución es ahora $N+0$, es decir, 2.

$$(fa . \sim ga) \vee (fb . \sim gb) \vee \sim fa \vee gb \qquad E$$

$$\sim ga \vee fb \vee \sim fa \vee gb$$

S no es válida, pues E no es tautológico.

III) $$(\exists x)(fx \vee gb) . \supset . fb \vee gb \qquad S$$

$$(x)(\sim fx . \sim gb) \vee fb \vee gb \qquad S'$$

También aquí deben emplearse dos constantes de substitución, pues N = 1 y r = 1.

$$(\sim fa . \sim gb) \vee fb \vee gb \qquad E$$

$$\sim fa \vee fb \vee gb$$

S no es válida.

IV) $$(\exists x)(fx \vee gy) . \supset . fc \vee gy \qquad S$$

Cerrando S:

$$(y)[(\exists x)(fx \vee gy) . \supset . fc \vee gy]$$

Extrayendo '(∃x)', reduciendo el operando, y simplificando:

$$(y)(x)(\sim fx . \sim gy . \vee . fc \vee gy)$$

$$(y)(x)(\sim fx \vee fc \vee gy)$$

Como se trata de una forma normal prenex con prefijo propio y el operando está reducido ya, se pasa de frente a la substitución de los operandos, empleando tres constantes (N = 1 y r = 2).

$$\sim fa \vee fc \vee gb \qquad E$$

Ni E es tautológico ni S es válido.

V) $$(y)[(x)(fx \vee gy) . \supset . fc \vee gy] \qquad S(*)$$

Este ejemplo es parecidísimo al anterior, de manera que el proceso es similar.

$$(y)[(\exists x)(\sim fx . \sim gy) \vee fc \vee gy]$$

$$(y)(\exists x)(\sim fx . \sim gy . \vee . fc . \vee . gy)$$

$$(y)(\exists x)(\sim fx \vee fc \vee gy) \qquad S'$$

$$\sim fa \vee \sim fc \vee fc \vee ga \qquad E$$

E es tautológico y S válido.

(*) De Copi, Symbolic Logic, p. 99, resuelto mediante BS en VI. 4 (ejemplo VI), supra.

VI) $(x)[fx.(\exists x)(gx.hy)]. \supset .fb.(\exists x)(gx.hy)$ S(*)

Cerrando S:

$$(y)\{(x)[fx.(\exists x)(gx.hy)]. \supset .fb.(\exists x)(gx.hy)\}$$

Procediendo como de costumbre:

$$(y)[\overline{(x)fx.(\exists x)gx.\sim hy}. \vee .fb.(\exists x)gx.hy]$$

$$(y)[(\exists x)\sim fx. \vee .(x)\sim gx. \vee .\sim hy. \vee .fb.(\exists x)gx.hy]$$

$$(y)[(\exists x)\sim fx \vee (x)\sim gx \vee \sim hy \vee fb]$$

Prefiriendo extraer los cuantificadores:

$$(y)(x)(\exists z)(\sim fz \vee \sim gx \vee \sim hy \vee fb)$$

E es entonces

$$\sim fa \vee \sim fb \vee \sim fc \vee \sim ga \vee \sim hc \vee fb \ .$$

Como es tautológico, S es válida.

6. Se procede en esta sección a justificar las reglas del procedimiento FH, es decir, a demostrar que permite decidir acerca de la validez o 1-verdad de toda fórmula monádica cerrada de primer grado (**), y ello se logra probando, sucesivamente, 1) que toda fórmula predicativa monádica de primer grado es reducible a otra fórmula equivalente básica S; 2) que toda fórmula monádica básica S es reducible a otra equivalente, en forma normal prenex con prefijo propio; 3) que toda fórmula monádica S en forma normal prenex con prefijo propio es decidible mediante las reglas de FH; y 4) que la presencia en S de letras proposicionales y/o constantes individuales no afecta la decidibilidad de S, de acuerdo a las reglas de FH.

(*) De Copi, loc. cit.
(**) En toda esta sección, "fórmula" deberá entenderse siempre como "fórmula cerrada", salvo indicación en contrario.

1) Sea S_1 una fórmula monádica compleja sin letras proposicionales ni constantes individuales. Reducirla a otra fórmula monádica básica equivalente S no es otra cosa que internar sucesiva y metódicamente sus cuantificadores hasta lograr que todas las cuantificaciones de S_1 sean básicas y unificar a continuación las diversas variables individuales respecto a 'x'.

Debe empezar, por tanto, la reducción de S_1, tomando una de sus cuantificaciones no básicas e internando de inmediato el cuantificador Q_1 que sea de grado mínimo en ella (*). De esta manera se logrará que en el operando del cuantificador Q_2, de grado inmediatamente superior, aparezcan cuantificaciones básicas y fórmulas elementales con variables ligadas o libres. Internando ahora Q_2, el operando de Q_3 tendrá las mismas características que tuvo el de Q_2. Habrá de llegarse necesariamente, procediendo ordenadamente de este modo, al cuantificador Q_m, de máximo grado, en cuyo operando aparecerán <u>únicamente</u> cuantificaciones básicas y fórmulas elementales con variables <u>ligadas</u>. Internando por último Q_m desaparece la cuantificación no básica inicial.

De esta manera se proseguirá con las demás cuantificaciones no básicas de S_1. Eliminadas éstas y unificadas las variables, S_1 quedará transformada en S, que será la fórmula monádica equivalente buscada.

El algoritmo que aparece en la sección 3, supra, permite, en todo caso concebible, el internamiento de cuantificadores; por lo tanto ha quedado demostrada la reducibilidad de toda fórmula compleja de la especie indicada a otra básica equivalente.

(*) Sobre grado de un cuantificador, véase sección 3, supra.

2) Toda fórmula monádica básica (en sentido estricto) S puede reducirse a otra equivalente en forma normal prenex con prefijo propio, y a la inversa. En efecto:

a) Toda conectiva que S exhiba "truth-functionally" y que no sea '.', '∨' o '∼' puede ser substituída por alguna combinación de éstas, de acuerdo a conocidas reglas de la Lógica Proposicional (*). Por lo tanto a toda fórmula S corresponde otra equivalente S' que exhibe únicamente '.', '∨' y/o '∼', internada esta última, de acuerdo a las reglas de intercambio de cuantificadores.

b) Todos los cuantificadores de S' pueden extraerse de manera tal que los U-cuantificadores aparezcan a la izquierda de los E-cuantificadores, con lo que S_f, la fórmula así obtenida, se hallará en forma normal prenex con prefijo propio, en el que figurarán exactamente los mismos cuantificadores que en S', y la matriz de S_f será idéntica a la fórmula S', una vez borrados los cuantificadores de ésta. Si S' no exhibe sino U- o E-cuantificadores, su forma normal prenex tendrá, sin más, prefijo propio, compuesto por los mismos cuantificadores que figuran en S'.

c) Efectuando a la inversa las mismas operaciones, S_f se transforma en S'. Como S y S' son equivalentes, S y S_f también lo serán.

3) La validez de S_f, y, por tanto, la de toda fórmula monádica S equivalente, es decidible. En efecto:

a) Para que '$(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_r)\emptyset(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_r)$' sea váli-

---

(*) Véase Hilbert-Ackermann, Lógica Teórica, I.4.

da es condición suficiente y necesaria que lo sea para un dominio compuesto de r elementos $a_1, a_2, \ldots\ldots a_r$.

i) Es condición necesaria, pues si no fuera válida para r distintos individuos, no lo sería tampoco universalmente.

ii) Es condición suficiente, pues si es válida para r distintos elementos, lo será también para todo r-ple de elementos pertenecientes a un dominio D con n elementos ($n \geq r$). Si es válido para D cuando $n \geq r$, también lo será cuando $n < r$ (*). Como n indica un entero positivo cualquiera, si la fórmula es válida para r elementos, también lo será para un dominio cualquiera, y será, por tanto, universalmente válida.

b) Para que '$(\exists y_1, \ldots, \exists y_m)\emptyset(y_1, \ldots\ldots, y_m)$' sea válida es condición suficiente y necesaria que lo sea para un dominio compuesto de 1 elemento.

i) Es condición necesaria, como resulta obvio.

ii) Es condición suficiente, pues '$(\exists y_1, \ldots\ldots, \exists y_m)\emptyset(y_1, \ldots\ldots, y_m)$' es más débil que '$(y)\emptyset(y_1, \ldots\ldots, y_m)$' (**), y como ésta, de acuerdo a (a) supra, es universalmente válida si lo es para un dominio de un elemento, '$(\exists y_1, \ldots\ldots, \exists y_m)\emptyset(y_1, \ldots\ldots, y_m)$' también lo será si lo es para este mismo dominio.

c) Para que '$(x_1, \ldots\ldots, x_r, \exists y_1, \ldots\ldots, y_m)\emptyset(x_1, \ldots, x_r, \exists y_1, \ldots, y_m)$'

(*) Ibid., teorema XXVII, p. 140.
(**) Bernays-Schönfinkel, Entscheidungsproblem, p. 358.

sea válida es condición suficiente y necesaria que lo sea en un dominio de r elementos.

i) Es condición necesaria, como resulta evidente.

ii) Es condición suficiente, puesto que si y sólo si es válida para un tal dominio, la disyunción de las fórmulas '$\emptyset(a_1,\ldots,a_r,y_1,\ldots,y_m)$' en las que se han reemplazado las 'y' por las r constantes 'a_i' de todas las maneras posibles, es válida; y como cada una de dichas fórmulas P_i $(1 \leq i \leq r^m)$ implica individualmente a

$(\exists y_1,\ldots\ldots,\exists y_m)\emptyset(a_1,\ldots\ldots,a_r,y_1,\ldots\ldots,y_r)$ (P) ,

el condicional

$P_1 \supset P.P_2 \supset P.\ldots\ldots P_{r^m} \supset P.P_1 \vee P_2 \vee \ldots\ldots \vee P_{r^m}: \supset .P$

es válido, siendo por tanto, universalmente válida la expresión

$(\exists y_1,\ldots\ldots,\exists y_m)\emptyset(a_1,\ldots\ldots,a_r,y_1,\ldots\ldots,y_r)$.

Pero esto significa que

$(x_1,\ldots\ldots,x_r,\exists y_1,\ldots\ldots,\exists y_m)\emptyset(x_1,\ldots\ldots,x_r,y_1,\ldots\ldots,y_m)$

es también universalmente válida, de acuerdo a (a), supra (*).

En los tres incisos anteriores se han considerado las únicas tres configuraciones que puede adoptar una fórmula S_f en forma normal prenex con prefijo propio, y se han establecido, para cada una de ellas, las condiciones suficientes y necesarias para su validez. Ya se probó en la segunda parte de esta sección que S' y S_f son intercambiables, de manera que dichas condiciones valen también para S', y como son

(*) Todo este inciso (c) es una versión libre del pasaje que aparece en Herbrand, Recherches, pp. 51-52.

exactamente las mismas que prescriben las reglas de FH, éstas quedan justificadas cuando S' ostenta sólo U- o E-cuantificadores.

Como, por otra parte, basta establecer que la disyunción D, construída como se dijo en el inciso c ii, es c-válida para saber si lo es una fórmula S_f (o su equivalente S') con U- y E-cuantificadores, la demostración de que D c-equivale al esquema para la decisión E, construído de acuerdo a lo prescrito por las reglas de FH, sirve al mismo tiempo para la justificación de éstas cuando en S' figuran U- y E-cuantificadores (que es el caso que falta probar).

Ahora bien: como toda fórmula monádica S' (que ahora debe exhibir U- y E-cuantificadores) se reduce, bien a una conjunción de cuantificaciones básicas, bien a una disyunción de cuantificaciones básicas, bien a una forma normal disyuntiva de cuantificaciones básicas, la demostración requerida habrá de consistir en probar que, en cualquiera de estos tres casos, E c-equivale a D.

a) Sea S'

$$(x_1)U_1x_1.(x_2)U_2x_2...(x_r)U_rx_r.(\exists y_1)A_1y_1.(\exists y_2)A_2y_2...$$
$$...(\exists y_m)A_my_m \text{ (*)}.$$

E, de acuerdo a R2 y R3, será

$$U_1a_1.U_2a_2...U_ra_r.(A_1a_1 \vee A_1a_2 \vee ... \vee A_1a_r).$$
$$.(A_2a_1 \vee A_2a_2 \vee ... \vee A_2a_r).(A_ma_1 \vee A_ma_2 \vee ... \vee A_ma_m).$$

Por distribución E queda convertida en

(*) U_ix_i representa el operando de una cuantificación universal básica (en sentido estricto); A_iy_i el de una cuantificación existencial básica (también en sentido estricto). Cuando 'i' aparece en un subíndice de 'x', $1 \leq i \leq r$ en el primer caso y $1 \leq i \leq m$ en el segundo (r es el número de U-cuantificadores y m el de E-cuantificadores).

$$U_1a_1.U_2a_2....U_ra_r.A_1a_2.A_2a_1....A_ma_1$$
$$.v.U_1a_1.U_2a_2....U_ra_r.A_1a_1.A_2a_1....A_ma_2$$
$$.v.......................................$$
$$.v.U_1a_1.U_2a_2....U_ra_r.A_1a_1.A_2a_1....A_ma_r$$
$$.v.U_1a_1.U_2a_2....U_ra_r.A_1a_1.A_2a_2....A_ma_1$$
$$.v.U_1a_1.U_2a_2....U_ra_r.A_1a_1.A_2a_2....A_ma_2$$
$$.v.......................................$$
$$.v.U_1a_1.U_2a_2....U_ra_r.A_1a_r.A_2a_r....A_ma_r$$

que no es otra cosa que D, cuando S' está puesta en la forma normal prenex con prefijo propio equivalente S_f , es decir,

$$(x_1,x_2,\ldots,x_r,\exists y_1,\exists y_2,\ldots,\exists y_m)$$
$$(U_1x_1.U_2x_2...U_rx_r.A_1y_1.A_2y_2...A_my_m).$$

b) Sea S'

$$(x_1)U_1x_1 \vee (x_2)U_2x_2 \vee\ldots(x_r)U_rx_r \vee (\exists y_1)A_1y_1 \vee (\exists y_2)A_2y_2 \vee$$
$$\ldots \vee (\exists y_m)A_my_m .$$

E, de acuerdo a FH, es

$$U_1a_1 \vee U_2a_2 \vee\ldots\vee U_ra_r \vee (A_1a_1 \vee A_1a_2 \vee\ldots\vee A_1a_r)\vee$$
$$\vee(A_2a_1 \vee A_2a_2 \vee\ldots\vee A_2a_r) \vee\ldots\vee (A_ma_1 \vee A_ma_2 \vee\ldots\vee A_ma_r).$$

Eliminando los paréntesis; agregando, unidos por disyunción, tantos U_ia_i y A_ia_i cuantos sean necesarios, en virtud de la regla '$p \vee p$ eq. p'; y ordenando convenientemente, se obtiene

$$U_1a_1 \vee U_2a_2 \vee \ldots \vee U_ra_r \vee A_1a_1 \vee A_2a_1 \vee \ldots \vee A_ma_1$$

$$\vee\, U_1a_1 \vee U_2a_2 \vee \ldots \vee U_ra_r \vee A_1a_1 \vee A_2a_1 \vee \ldots \vee A_ma_2$$

$$\vee \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\vee\, U_1a_1 \vee U_2a_2 \vee \ldots \vee U_ra_r \vee A_1a_1 \vee A_2a_1 \vee \ldots \vee A_ma_r$$

$$\vee \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\vee\, U_1a_1 \vee U_2a_2 \vee \ldots \vee U_ra_r \vee A_1a_r \vee A_2a_r \vee \ldots \vee A_ma_1$$

$$\vee \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\vee\, U_1a_1 \vee U_2a_2 \vee \ldots \vee U_ra_r \vee A_1a_r \vee A_2a_r \vee \ldots \vee A_ma_r \,.$$

Esta disyunción no es otra que D cuando S' está puesta en la forma normal prenex con prefijo propio equivalente S_f, es decir,

$$(x_1, x_2 \ldots, x_r, \exists y_1, \exists y_2, \ldots, \exists y_m)$$
$$(U_1x_1 \vee U_2x_2 \vee \ldots \vee U_rx_r \vee A_1y_1 \vee A_2y_2 \vee \ldots \vee A_my_m)$$

c) Sea la reducida de S' la forma normal disyuntiva

$$(x_1)U_1x_1.(x_2)U_2x_2\ldots(x_r)U_rx_r.(\exists y_1)A_1y_1.(\exists y_2)A_2y_2..(\exists y_m)A_my_m$$

$$.\vee.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$.\vee.(x'_1)U'_1x'_1.(x'_2)U'_2x'_2\ldots(x'_r)U'_rx'_r.(\exists y'_1)A'_1y'_1.(\exists y'_2)A'_2y'_2..(\exists y'_m)A'_my'_m$$

E, de acuerdo a FH, es

$$U_1a_1.U_2a_2\ldots U_ra_r.(A_1a_1 \vee A_1a_2 \vee \ldots \vee A_1a'_r)$$
$$.(A_2a_1 \vee A_2a_2 \vee \ldots \vee A_2a'_r)\ldots(A_ma_1 \vee A_ma_2 \vee \ldots \vee A_ma'_r)$$

$$.\vee\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$.\vee .U'_1a'_1.U'_2a'_2\ldots U'_ra'_r.(A'_1a_1 \vee A'_1a_2 \vee \ldots \vee A'_1a'_r)$$
$$.(A'_2a_1 \vee A'_2a_2 \vee \ldots \vee A'_2a'_r)\ldots(A'_ma_1 \vee A'_ma_2 \vee \ldots \vee A'_ma'_r) \,,$$

la misma que, por distribución, se transforma en

$$U_1a_1.U_2a_2\ldots U_ra_r.A_1a_1.A_2a_1\ldots A_ma_1$$

$$.\vee.U_1a_1.U_2a_2\ldots U_ra_r.A_1a_1.A_2a_1\ldots A_ma_2$$

$$.\vee.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$.\vee.U_1a_1.U_2a_2\ldots U_ra_r.A_1a_1.A_2a_1\ldots A_ma'_r$$

$$.\vee.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$.\vee.U_1a_1.U_2a_2\ldots U_ra_r.A_1a'_r.A_2a'_r\ldots A_ma'_r$$

$$.\vee.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$.\vee.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$.\vee.U'_1a'_1.U'_2a'_2\ldots U'_ra'_r.A'_1a_1.A'_2a_1\ldots A'_ma_1$$

$$.\vee.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$.\vee.U'_1a'_1.U'_2a'_2\ldots U'_ra'_r.A'_1a'_2.A'_2a'_r\ldots A'_ma'_r$$

Está expresión contiene exactamente los mismos d-componentes que D, Ordenándolos convenientemente se tiene

$$U_1a_1.U_2a_2\ldots U_ra_r.A_1a_1.A_2a_1\ldots A_ma_1.\vee\ldots\ldots\vee. \\ U'_1a'_1.U'_2a'_2\ldots U'_ra'_r.A'_1a_1.A'_2a_1\ldots A'_ma_1$$

$$.\vee.U_1a_1.U_2a_2\ldots U_ra_r.A_1a_1.A_2a_1\ldots A_ma_1.\vee\ldots\ldots\vee. \\ U'_1a'_1.U'_2a'_2\ldots U'_ra'_r.A'_1a_1.A'_2a_1\ldots A'_ma_2$$

$$.\vee.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$.\vee.U_1a_1.U_2a_2\ldots U_ra_r.A_1a_1.A_2a_1\ldots A_ma_1.\vee\ldots\ldots\vee. \\ U'_1a'_1.U'_2a'_2\ldots U'_ra'_r.A'_1a_1.A'_2a_1\ldots A'_ma'_r$$

$$.\vee.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$.\vee.U_1a_1.U_2a_2\ldots U_ra_r.A_1a'_r.A_2a'_r\ldots A_ma'_r.\vee\ldots\ldots\vee. \\ U'_1a'_1.U'_2a'_2\ldots U'_ra'_r.A'_1a'_r.A'_2a'_r\ldots A'_ma'_r \quad ,$$

que no es otra cosa que D para la forma normal disyuntiva de S' puesta en forma normal prenex con pre fijo propio.

De esta manera se ha demostrado el caso que restaba, y, por tanto, FH es capaz de decidir acerca de la validez o l-verdad de toda fórmula monádica sin letras proposicionales ni constantes individuales.

4) La presencia en una fórmula monádica cualquiera S_1 de letras proposicionales y/o constantes individuales no afecta la corrección de los resultados que se obtienen mediante la aplicación de FH. En efecto:

a) En el curso de la reducción de S a S' las letras proposicionales que figuran fuera de los operandos permanecen sin alterar, y una vez alcanzado el esquema molecular E, como la decisión depende de su estructura esquemática o "truth-functional", nada hay que distinga esencialmente entre dichas letras, que representan proposiciones, y las fórmulas elementales de tipo 'αa_i', que también las representan.

Además, para efectos de la aplicación de FH, se han considerado básicas cuantificaciones en cuyo operando aparecen letras proposicionales. Nada lo impide, pues puede demostrarse fácilmente que un esquema E, obtenido de S', fórmula básica en cuyas cuantificaciones aparecen letras proposicionales, c-equivale a otro esquema E' obtenido de la misma fórmula S', una vez extraídas dichas letras de sus operandos (*).

b) Todo lo dicho en el inciso anterior para el caso de que S exhiba letras proposicionales vale para cuando

(*) Recuérdese que en S' sólo pueden figurar '.', '$\vee$' y '$\sim$', internada esta última.

S exhiba fórmulas elementales con constantes individuales. Falta demostrar únicamente la razón de la regla especial R3a que rige estos casos.

i) Sea S una fórmula monádica básica en que aparecen únicamente r U-cuantificadores. Se ha demostrado en el inciso 3a de esta sección que S es válida si y sólo si es válida para un dominio con r elementos. Si en S aparecen N constantes individuales, la prueba para la validez, si ha ser procedente, no permite que se tome en cuenta dentro de un r-ple arbitrario ninguna de las N constantes individuales que ostenta S. De allí que la regla reserve los r elementos para la substitución de los r U-operandos, sin que pueda utilizarse para dicha substitución alguna de las N constantes individuales exhibidas por S.

ii) Sea S una fórmula monádica básica que exhibe únicamente E-cuantificadores y N constantes individuales '$(\exists x_1, \ldots, x_m)\emptyset(a_1, \ldots, a_N, x_1, \ldots \exists x_m)$'. Para que sea válida es condición suficiente y necesaria que lo sea para un dominio $\{a_1, \ldots\ldots, a_N\}$. Es condición necesaria por obvias razones, y suficiente, puesto que, si y sólo si es válida en dicho dominio, la disyunción D de las fórmulas

$$\emptyset(a_1, \ldots\ldots, a_N, x_1, \ldots\ldots, x_m) \ ,$$

en las que se ha reemplazado las 'x' por las N constantes 'a_i' de todas las maneras posibles, es válida; cada uno de los d-componentes $P_i (1 \leq i \leq N^m)$ implica por su parte a

$$(\exists x_1, \ldots\ldots, \exists x_m)\emptyset(a_1, \ldots\ldots, a_N, x_1, \ldots\ldots, x_m) \ (P) \ ,$$

y como el condicional

$$P_1 \supset P . P_2 \supset P . \ldots . P_{N^m} \supset P . P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee P_{N^m} . \supset . P$$

es válido, se concluye que es válida

$$(\exists x_1, \ldots, \exists x_m) \emptyset (a_1, \ldots, a_N, x_1, \ldots, x_m).$$

Basta entonces probar la validez de D, pero como ésta equivale al esquema para la decisión E, construído de acuerdo a las reglas de FH, incluída R3a, FH queda justificado para este caso.

iii) Sea S una fórmula monádica básica en que aparecen U-, E-cuantificadores y N constantes individuales. La justificación de R3a no ofrece dificultades y se basa tanto en el inciso (i), supra, como en el 3 c (ii), supra.

7. Aunque no corresponde estrictamente ni al tema ni al propósito de esta tesis, no es posible dejar de hacer referencia a la posibilidad de la extensión del procedimiento FH a todas las fórmulas cerradas de la Lógica Cuantificacional de primer grado, sea cual fuere la n-adicidad de las variables predicativas que en ellas aparezcan, siempre que dichas fórmulas sean reducibles a una forma normal prenex con prefijo propio, cuya decidibilidad ha sido demostrada por Bernays y Schönfinkel.

Dicha extensión, que puede fundamentarse siguiendo los mismos lineamientos de la prueba que se ha desarrollado en la sección anterior, pero que, por lo arriba dicho, no se probará aquí, se rige por las siguientes reglas:

RN1. Reducir S a S' y transformar a ésta de modo tal que todas sus cuantificaciones se hallen en forma normal prenex con prefijo propio, debiéndose entender que una cuantificación básica ya se halla en esa forma.

RN2. Borrar los r U-cuantificadores, reemplazando las variables de los U-operandos según la manera usual.

RN3. Borrar los E-cuantificadores, reemplazando las variables de los E-operandos como de costumbre, pero cuando un E-operando se halle precedido por n E-cuantificadores (n > 1) el respectivo E-operando 'Øxy....', será substituído por una disyunción de r^n miembros '$Øa_1a_1$....', en cada uno de los cuales deberá aparecer una distinta combinación de las r constantes de substitución.

RN4. Dejar inalteradas las letras proposicionales y las fórmulas elementales con constantes individuales.

RN5. Determinar si E, el esquema molecular obtenido, es o no tautológico.

RN6. S es válida si y sólo si E es tautológico.

Ejemplos

I) $(x)(y)(fx.gy.\supset.hxy).\supset.(x)[fx\supset(y)(gy\supset hxy)]$ S(*)

Extrayendo los cuantificadores y reduciendo los operandos:

$$(\exists x)(\exists y)(fx.gy.\sim hxy) \vee (x)(y)(\sim fx \vee \sim gy \vee hxy)$$

Borrando los cuantificadores:

$$(fa.ga.\sim haa) \vee (fa.gb.\sim hab) \vee (fb.ga.\sim hba) \vee (fb.gb.\sim hbb) \vee \sim fa \vee \sim gb \vee hab \qquad E$$

Simplificando E:

$$(ga.\sim haa) \vee \sim hab \vee (fb.ga.\sim hba) \vee (fb.\sim hbb) \vee \sim fa \vee \sim gb \vee hab$$

Esta expresión es tautológica, pues aparecen entre sus d-componentes 'hab' y '∼hab'. Por ello S es válida.

II) $(x)[fx.(y)(gy\supset hxy.\supset.hx)].(x)(gx\supset px).\supset.$
$.\supset.(x)[fx.(y)(py\supset hxy.\supset.hx)]$ S(**)

(*) De Smullyan, Fundamentals of Logic, p. 72.
(**) De Smullyan, ibid., p. 77.

Extrayendo los cuantificadores y reduciendo los operandos:

$$(\exists x)(\exists y)[\sim fx.\vee.(gy \supset hxy).\sim hx] \vee (\exists x)(gx.\sim px) \vee (x)(y)$$
$$[fx.(py \supset hxy) \supset hx]$$

$$(\exists x)(\exists y)(\sim fx.\vee.\sim gy \vee hxy.\sim hx) \vee (\exists x)(gx.\sim px) \vee (x)(y)[fx.(py.\sim hxy.\vee.hx)]$$

$$(\exists x)(\exists y)(\sim fx.\vee.\sim gy.\sim hx.\vee.hxy.\sim hx) \vee (\exists x)(gx.\sim px) \vee$$
$$(x)(y)(fx.py.\sim hxy.\vee.fx.hx)$$

Borrando los cuantificadores:

$$\sim fa \vee (\sim ga.\sim ha) \vee (haa.\sim ha) \vee \sim fa \vee (\sim gb.\sim ha) \vee (hab.\sim ha) \vee$$
$$\sim fb \vee (\sim ga.\sim hb) \vee (hba.\sim hb) \vee \sim fb \vee (\sim gb.\sim hb) \vee (hbb.\sim hb) \vee$$
$$\vee (ga.\sim pa) \vee (gb.\sim pb) \vee (fa.pb.\sim hab) \vee (fa.ha) \qquad E$$

Simplificando E:

$$\sim fa \vee \sim ga \vee haa \vee \sim gb \vee hab \vee \sim fb \vee (hba.\sim hb) \vee (hbb.\sim hb) \vee$$
$$\vee \sim pa \vee \sim pb \vee ha \vee \sim hab$$

Como también aparecen entre sus d-componentes 'hab' y '~hab', esta expresión es tautológica y S es válida.

III) $$(x)(fx \supset gx).\supset.(y)[(\exists x)(fx.hyx) \supset (\exists x)(gx.hyx)] \qquad S(*)$$

Extrayendo los cuantificadores y reduciendo los operandos:

$$(\exists x)(fx.\sim gx) \vee (y)(x)(\exists z)(\sim fx.\vee.\sim hyx.\vee.gz.hyz)$$

Borrando los U-cuantificadores:

$$(\exists x)(fx.\sim gx) \vee (\exists z)(\sim fa.\vee.\sim hba.\vee.gz.hbz)$$

Extrayendo del segundo E-cuantificador las fórmulas elementales ya reemplazadas a fin de simplificar el operando por substituir:

$$(\exists x)(fx.\sim gx) \vee \sim fa \vee \sim hba \vee (\exists z)(gz.hbz)$$

Borrando los E-cuantificadores:

$$(fa.\sim ga) \vee (fb.\sim gb) \vee \sim fa \vee \sim hba \vee (ga.hba) \vee (gb.hbb)$$

Simplificando E se obtiene

$$\sim ga \vee (fb.\sim gb) \vee \sim fa \vee \sim hba \vee hba \vee (gb.hbb),$$

que es evidentemente tautológica. S es válida.

(*) De Quine, Métodos, p. 242.

C O N C L U S I O N

El procedimiento propuesto en el último capítulo constituye una genuina técnica de simplificación. Desde el inicio del procedimiento decisorio la fórmula sometida a FH va disolviéndose,por decirlo así, al pasar de una forma a otra, dejando entrever cada vez más claramente lo que de ella ha de ser decisivo en el desenlace final. Ese proceso de solución - o, si se prefiere, de disolución - es breve, rectilíneo, sin ramificaciones o disyuntivas, y a esta característica se debe que los objetivos parciales se hallen claramente subordinados respecto al único que, al final de cuentas, importa, y de esta manera su enseñanza se facilita enormemente.

El procedimiento FH no es complicado, si por complicación se entiende la excesiva variedad de direcciones por elegir y de reglas que observar; se basa en operaciones razonablemente fáciles, divulgadas ya a nivel de un curso elemental de Lógica y centradas en la noción de tautología; permite decidir sobre la validez de fórmulas que exhiben constantes individuales, y cuando en aquéllas figuran letras proposicionales, no requiere el aditamento de reglas u operaciones especiales para extraerlas de los operandos; y evita de ordinario la ejecución de la tabla de valores en que finalizan normalmente otros procedimientos, pues la particular estructura "truth-functional" de S' y de E hace posible con suma frecuencia el uso de las reglas llamadas de absorción y la simplificación consiguiente de las fórmulas tratadas, de manera que muchísimas veces puede establecerse por simple inspección el carácter tautológico del esquema en que remata el proceso.

Por estas razones, a las que debe agregarse la de poseer FH un extenso campo de aplicación, que va desde simples cuantificaciones básicas hasta cierta importante variedad de fórmulas n-ádicas ($n > 1$), pasando por aquéllas monádicas en que figuran letras proposicionales y constantes individuales, el autor de esta tesis sostiene que la adopción del procedimiento que propone ofrece indiscutibles ventajas de orden práctico y didáctico, y cree oportuno encarecer su estudio y discusión, que determinarán, en última instancia, si en realidad ha valido la pena agregar uno más a la serie de **estimables** métodos de que actualmente se dispone.

A N E X O I

Nota sobre algunos procedimientos mecánicos no propiamente decisorios.

Existen en Lógica ciertos procedimientos mecánicos que permiten saber si S pertenece a L, pero no si S no pertenece a L, es decir, que son capaces de determinar cuándo se da dicha pertenencia y nada más. Si S no perteneciera a L no habría modo de averiguarlo mediante dichos procedimientos mecánicos: éstos no arrojan un resultado en toda ocasión, y al no ser, por tanto, terminantes, no son algoritmos y no deben ser considerados procedimientos decisorios.

Vale la pena hacer una somera referencia a tres procedimientos mecánicos de esa índole ideados para fórmulas n-ádicas ($n \geq 1$) de primer grado por el profesor W. V. O. Quine, que si bien, como él mismo indica, no son decisorios en sentido estricto, lo son de hecho tratándose de fórmulas monádicas de primer grado, por más que su autor nada afirme sobre el particular (*).

Uno de ellos es el que aparece en el Apéndice agregado a Methods of Logic en su edición revisada de 1959 (pero que ya había sido incluído, como folleto separado, en la tercera impresión de la primera edición). Allí (**) se describe una técnica

(*) Walter Dubislav, en un artículo titulado "Elementarer Nachweis der Widerspruchlosigkeit des Logik-Kalküls", expone un método que sólo permite establecer mecánicamente, mediante el empleo de tablas de valores, si una fórmula monádica es válida, y por ello no es decisorio, pues la c-validez es aquí simplemente una condición suficiente, pero no necesaria, de la validez cuantificacional. Este método, muy poco difundido, se halla descrito en Reichenbach, Elements, § 25, y no se le toma en cuenta en este Anexo pues en ningún caso puede llegar a ser estrictamente decisorio, aunque se le puede emplear exitosamente con "additional material thinking". (Op. cit., p. 132).
(**) Methods, pp. 254-57; Métodos, pp. 340-47.

que "no es más que medio procedimiento decisorio" (*) por no proporcionar "procedimientos para mostrar la no validez" (**) y que, "aparte de detalles inesenciales de su presentación externa,..... se debe a Herbrand" (+). De acuerdo a las prescripciones de QH, que así sera denominado en lo sucesivo, para mostrar la validez de una fórmula n-ádica de primer grado S es preciso primero cerrarla, negar luego el cierre, y obtener inmediatamente después la forma normal prenex equivalente. Luego, mediante el empleo de las reglas de instanciación universal (++) y existencial (*+), se deberán obtener fórmulas derivadas en las que el número de cuantificadores sea cada vez menor, hasta alcanzar expresiones que carezcan totalmente de ellos (y que son propiamente truth-functions o esquemas moleculares). Si alguna conjunción de estos esquemas resulta inconsistente, la fórmula inicial S es válida(+*). El proceso de subjunción, que así lo llama Quine, no siempre alcanza su término, es decir, no hay forma de obtener todos los esquemas posibles, y entonces, si la inconsistencia requerida no ha sido hallada, eso no significa que no pueda existir, y por tanto no puede afirmarse que S no sea válida hasta no terminar el proceso, lo que, de acuerdo a la hipótesis, es imposible. QH, por tanto, no es decisorio.

Puede demostrarse, sin embargo, que cuando S es una fórmula monádica de primer grado, el proceso de subjunción termina siem-

---

(*) Métodos, p. 260.
(**) Loc. cit.
(+) Op. cit., p. 340. En Elementary Logic (1966), p. v, Quine afirma solamente: "It derives from the tradition of Skolem and Herbrand".
(++) Métodos, p. 220.
(*+) Ibid., p. 224.
(+*) El autor no adopta este procedimiento en las secciones 27 y ss., donde expone en cambio una técnica deductiva para fórmulas n-ádicas de primer grado, porque "el aparato elaborado [sic] de aquellas secciones tiene verdaderas ventajas prácticas, como el lector comprobará si intenta algunos ejercicios comparativos". (Ibid., pp. 340-1).

("),
pre^ y por ello QH es decisorio para esa clase de fórmulas, pero Quine nada dice al respecto, hasta donde ha podido indagar el sustentante, ni en Methods ni en alguna otra parte (*), y por tanto no se le ha considerado como tal en lo principal de esta tesis. Si se le compara, en tal carácter, con FH, se aprecia fácilmente, con unos pocos casos que se resuelvan, su origen común, y, al mismo tiempo, todo lo que los separa en lo concerniente a la técnica de operación.

Dos procedimientos más (aunque en realidad se trata de uno solo), identificados como A y B, son expuestos en el artículo "A Proof Procedure for Quantification Theory" (**). Ambos constituyen, a todas luces, una nueva presentación, sin variar en nada lo esencial, del procedimiento QH ya mencionado, y como es obvio, tampoco pueden ser tenidos como algoritmos decisorios. Uno y otro procedimiento se basan en la reducción de la negación de una fórmula cuantificada cualquiera S (+), no necesariamente monádica, a una forma normal prenex equivalente ψ, seguida por la substitución en esta última de las ocurrencias de las variables (una vez suprimidos los cuantificadores en la forma que allí se indica) por elementos de una clase de términos, usualmente infinita,

---

(") Si es que se modifica QH disponiendo que la negación de S, sea forma normal prenex o no, sea reducida a una forma normal de Skolem, y proporcionando las reglas requeridas.
(*) Es curioso que en Elementary Logic, rev. ed. (1966), Quine abandone la técnica deductiva empleada en Métodos y ceda todo el campo a QH, ligeramente modificado, por considerar que "when ease of inculcation, ease of justification, and ease of application are added together and averaged out, it is far and away the easiest proof technique for quantification theory that I know" (op. cit., p. v), mientras que continúa, no obstante, sin hacer la menor mención al caso de las fórmulas monádicas.
(**) JSL 20 (1955), pp. 141-49.
(+) De acuerdo al tenor del artículo y a los ejemplos que en él aparecen, S carece de letras proposicionales y de constantes individuales.

denominada "léxico de ψ" (*). Efectuada que ha sido la substitución, se obtiene una "lexical instance" de ψ, pudiendo haber tantas substituciones y por tanto tantas "lexical instances" cuantas permita el léxico de ψ. La fórmula ψ será inconsistente, "i.e., satisfiable in no non-empty universe" (**), si y sólo si se ha llegado a una "truth-functionally inconsistent lexical instance or conjunction of lexical instances" (+), en cuyo caso S será válida.

Este procedimiento, pues B no es sino una "more practical adaptation" de A (++), constituiría una "actual decision procedure for inconsistency" (*+) siempre que el léxico de ψ fuera finito, pues en ese caso "the number of lexical instances is likewise finite" y se puede así someter "the conjunction of *all* lexical instances to a truth-table test" (+*). "A finite lexicon is assured when none of our prenex schemata has a universal quantifier to the left of an existential one" (***), de manera que, si al construir la forma normal prenex ψ es posible extraer primero los cuantificadores existenciales, el éxito también está asegurado.

Pero aunque Quine no lo diga, también puede afirmarse que cuando se trata de fórmulas monádicas el léxico de ψ es forzosamente finito ("), pues nada obsta para que en ese caso pueda obtenerse una forma prenex con el prefijo requerido, y entonces A (y por supuesto B) constituye un procedimiento decisorio para la inconsistencia, o, teniendo en cuenta la aproximación de Quine, para la validez universal.

(*) Proof Procedure, p. 141.
(**) Loc. cit.
(+) Op. cit., p. 142.
(++) Op. cit., p. 141.
(*+) Ibid., p. 144.
(+*) Loc. cit.
(***) Loc. cit.
(") Siempre que ψ sea una forma normal de Skolem. (Ver la primera nota al pie de la página anterior).

Cabe concluir, después de lo expuesto, que el procedimiento mecánico QH (o sus variantes A y B), según el objetivo para el que fué ideado, no es, en general, un procedimiento decisorio, pero, tratándose de fórmulas monádicas de primer grado, llega a serlo tras la modificación bosquejada arriba. En este caso, sobre el que nada dice expresamente Quine, QH resultaría ser un procedimiento decisorio de positiva utilidad.

A N E X O II

BIBLIOGRAFIA

(Conviene advertir que sólo se incluyen las obras mencionadas en el cuerpo de la tesis y que no siempre se utilizan arriba el título completo y los complementos bibliográficos de cada una de ellas sino la forma abreviada que se le asigna en esta Bibliografía. En toda referencia a algún pasaje de la tesis, la cifra romana indica el capítulo y la arábiga la sección respectiva de dicho capítulo. Cuando se omite la cifra romana la sección señalada se encuentra en el mismo capítulo. Las demás abreviaturas usadas no requieren aclaraciones especiales).

ACKERMANN, Wilhelm: Solvable Cases of the Decision Problem. Amsterdam, North-Holland Publishing Co., 1962.(Solvable Cases)

ANDERSON, John M. and JOHNSTONE, Henry W.: Natural Deduction. Belmont, Cal., Wadsworth Publishing Co., 1962.

BEHMANN, Heinrich: Beiträge zur Algebra der Logik, insbesondere zum Entscheidungsproblem. En: Mathematische Annalen, Bd. 86 (1922), pp. 163-229. (Algebra der Logik)

BERNAYS, Paul und SCHÖNFINKEL, Moses: Zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik. En: Mathematische Annalen, Bd. 99 (1928), pp. 342-372. (Entscheidungsproblem)

BETH, Evert W.: The Foundations of Mathematics. Amsterdam, North-Holland Publishing Co., 1959. (Foundations)

CARNAP, Rudolf: Einführung in die symbolische Logik. Wien, Springer Verlag, 1954. (Einführung)

COPI, Irving M.: Symbolic Logic. New York, The Macmillan Co., 1954.

CHURCH, Alonzo: A Note on the Entscheidungsproblem. En: JSL 1 (1936), pp. 40-41. (A Note)

---: Review of G. H. Von Wright's "On the Idea of Logical Truth" and "Form and Content in Logic". En: JSL 15 (1950), pp.58-59. (Review)

---: Introduction to Mathematical Logic (vol I). Princeton, N. J., Princeton University Press, 1956. (Introduction)

DAVIS, Martin: Computability and Unsolvability. New York, MacGraw-Hill, 1958. (Computability)

DUBISLAV, Walter: Elementarer Nachweis der Widerspruchlosigkeit des Logik-Kalküls. En: Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 161 (1929), pp. 107-112.

GOODSTEIN, R. L.: Mathematical Logic. Second Edition. [Leicester,] University of Leicester Press, 1961.

HALBERSTADT, William H.: An Introduction to Modern Logic. New York, Harper and Bros., 1960. (Modern Logic)

HERBRAND, Jacques: Recherches sur la théorie de la démonstration. Travaux de la Societé des Sciences et des Lettres de Varsovie (Classe III: Sciences Mathématiques et Physiques), Nr. 33. Warszawa, 1930. (Recherches)

---: Sur le problème fondamental de la logique mathématique. En: Comptes rendus de la Societé des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III, vol 24 (1931), pp. 12-56.

HILBERT, David und ACKERMANN, Wilhelm: Grundzüge der theoretischen Logik. Berlin, Springer Verlag, 1928[1], 1938[2], 1949[3] y 1959[4]. (Grundzüge)

---: Principles of Mathematical Logic. New York, Chelsea Publishing Co., 1950. (Es la traducción inglesa efectuada por L.M. Hammond, G.G. Leckie y F. Steinhardt, con notas de R.E. Luce, de Grundzüge[2]). (Mathematical Logic)

---: Elementos de Lógica Teórica. Madrid, Editorial Tecnos, 1962. (Es la versión española, debida a Víctor Sánchez de Zavala, de Grundzüge[4]). (Lógica Teórica)

HILBERT, David und BERNAYS, Paul: Grundlagen der Mathematik. Bd.I: Berlin, Springer, 1934; Bd. II: Berlin, Springer, 1939. (Grundlagen)

The Journal of symbolic Logic. Published quarterly by the Associa tion for Symbolic Logic. Baltimore, Md.,1936 and ff. (JSL)

KALISH, Donald and MONTAGUE, Richard: Logic. New York, Harcourt, Brace and World, Inc., 1964.

KLEENE, Stephen Cole: Introduction to Metamathematics. Amsterdam, North-Holland Publishing Co., 1952. (Metamathematics)

KNEALE, William and Martha: The Development of Logic. Oxford, Clarendon Press, 1962. (Development)

QUINE, Willard Van Orman: O Sentido da Nova Logica. Sao Paulo, Livraria Martins Editora, 1944. (O Sentido)

---: El Sentido de la Nueva Lógica. Buenos Aires, Nueva Visión, 1958. (Es la traducción al castellano de O Sentido, realizada por Mario Bunge). (Sentido)

---: On the Logic of Quantification. En: JSL 10 (1945),pp. 1-12. (Logic)

---: A Proof Procedure for Quantification Logic. En: JSL 20 (1955), pp. 141-49. (Proof Procedure)

---: Mathematical Logic. Revised Edition, Cambridge, Mass., Harvard University Press, 1958.

---: Methods of Logic. Revised Edition. New York, Henry Holt, and Co., Inc., [1959]. (Methods)

---: Los Métodos de la Lógica. Edición revisada. Barcelona, Ediciones Ariel, [1962]. (Versión castellana de Methods, debida a Manuel Sacristán).

---: Elementary Logic. Revised Edition. Cambridge, Mass., Harvard University Press, 1966.

REICHENBACH, Hans: Elements of Symbolic Logic. New York, The Macmillan Co., 1947. (Elements)

ROSSER, J. Barkley: An Informal Exposition of Proofs of Gödel's Theorem and Church's Theorem. En: JSL 4 (1939), pp. 53-60. (Informal Exposition)

SMULLYAN, Arthur: Fundamentals of Logic. Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, Inc., 1962.

STENDER, Richard: Didaktische Themen aus der neueren Mathematik. Heidelberg, Quelle und Meyer, 1962. (Didaktische Themen)

STOLL, Robert.; Set Theory and Logic. San Francisco, W.H. Freeman and Co., 1963.

---: Sets, Logic and Axiomatic Theories. San Francisco, W. H. Freeman and Co., 1961. (Sets)

SURANYI, János: Reduktionstheorie des Entscheidungsproblem im Prädikatenkalkül der ersten Stufe. Budapest, Verlag der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, 1959. (Reduktionstheorie)

TRAKHTENBROT, B. A.: Algorithms and Automatic Computing Machines. Translated and adapted from the second Russian Edition - - 1960 - by J. Kristian, J. D. MacCawley and S. A. Schmitt. Boston, D. C. Heath and Co., 1963. (Algorithms)

VON WRIGHT, Georg Henrik: Logical Studies. London, Routledge and Kegan Paul Ltd., 1957.

WILDER, Raymond L.: Introduction to the Foundations of Mathematics. New York, John Wiley and Sons, 1952. (Foundations)